Teoria Morse'a w układach hamiltonowskich

Równania Hamiltona opisują ewolucje układów fizycznych pochodzących na przykład z mechaniki klasycznej, czy elektrodynamiki. Przy skomplikowanej funkcji energii, dokładne zbadanie ewolucji układu fizycznego okazuje się być bardzo trudnym zadaniem. Jedną z możliwości podejścia do tego problemu jest zastosowanie metod topologicznych na przestrzeniach nieskończenie-wymiarowych. Takie podejście stosuje się chociażby do badania istnienia orbit periodycznych, czyli rozwiązań powracających do stanu początkowego po pewnym skończonym czasie. Trudniejsze natomiast jest pytanie o istnienie orbit homoklinicznych. Przy czym orbitą homokliniczną jest rozwiązanie, które zarówno w dodatnim, jak i ujemnym czasie dąży do tego samego punktu stacjonarnego, inaczej punktu krytycznego, będącego stanem spoczynku układu. Należy przy tym podkreślić, że badanie istnienia i ilości rozwiązań homoklinicznych jest jednym z podstawowych problemów w teorii układów hamiltonowskich. Ich istnienie może bowiem implikować chaos Smale'a w dynamice dyskretnej układu (patrz podkowa Smale'a). Z kolei istnienie nieskończenie wielu rozwiązań homoklinicznych wskazuje na niecałkowalność układu. Ciekawe jest również pytanie o to, czy założenie okresowości układu w czasie można zastąpić założeniem prawie okresowości.
W literaturze matematycznej pojawiło się ono pod koniec ubiegłego wieku na przykład w pracach Paula H. Rabinowitza i ma związek z dynamiką nieba – ruchy planet są na ogół prawie okresowe.

W niniejszym projekcie chcemy zmodyfikować znane już metody badawcze w taki sposób, aby można je było zastosować do problemów otwartych. Między innymi do badania układów hamiltonowskich z niestandardową energią kinetyczną lub do badania układów, w których co prawda energia kinetyczna jest standardowa, ale za to przestrzeń konfiguracji jest skomplikowana. W szczególności, chcemy się przyjrzeć wybranym niezmiennikom topologicznym, do których m.in. należą homologie Morse'a, homologie Floera i indeks Conleya w wersjach nieskończenie-wymiarowych oraz metodom wariacyjnym, gdy możliwe jest zdefiniowanie odpowiedniego funkcjonału działania.

Od czasu kiedy Marston Morse opublikował swoje prace o krzywych geodezyjnych, metody jego teorii stały się głównym narzędziem w badaniu układów Hamiltona. Współczesna teoria Morse'a oparta jest na rozmaitych zasadach wariacyjnych służących do wykrywania punktów krytycznych funkcjonałów działania, spośród których podstawowymi są funkcjonały Lagrange'a i Hamiltona. W studiowaniu funkcjonałów Lagrange'a doskonale sprawdza się nieskończenie wymiarowa teoria Morse'a, którą R. Palais i S. Smale rozwinęli w latach 60-tych ubiegłego stulecia. Funkcjonały Hamiltona wymagają bardziej wyrafinowanych metod. Należy do nich rozwinięta 20 lat później teoria Floera.

Interesujące wydaje się też być badanie związków między poszczególnymi niezmiennikami. W przeszłości takie badania znalazły zastosowanie również w innych dziedzinach matematyki, na przykład w geometrii różniczkowej i symplektycznej.

Przedłożony projekt badawczy będzie realizowany przez polsko-niemiecką grupę badawczą na Wydziale Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej Politechniki Gdańskiej pod kierunkiem pani dr hab. Joanny Janczewskiej i na Wydziale Matematyki Uniwersytetu w Bochum pod kierunkiem pana prof. dr. Alberto Abbondandolo.

Na koniec warto wspomnieć, że twórca wyżej wymienionej teorii (ko)homologii Floera, Andreas Floer, studiował na Uniwersytecie w Bochum. To właśnie tutaj w 1982 r. uzyskał tytuł zawodowy magistra, w 1984 r. obronił rozprawę doktorską, a od 1990 r. do swojej tragicznej śmierci w 1991 r. pracował na stanowisku profesora.