POPULARNONAUKOWE STRESZCZENIE PROJEKTU

Transformacja Fouriera jest narzędziem, które pozwala analizować sygnał na dwa różne sposoby – badając jego właściwości w dziedzinie czasu (lub przestrzeni w przypadku obrazów), gdzie reprezentowany jest przez próbki o określonej amplitudzie (np. wartości pikseli), a także w dziedzinie częstotliwości, gdzie przedstawiany jest jako suma (nieskończona) składników sinusoidalnych o określonych częstotliwościach i amplitudach.

Klasyczna teoria sygnałów zajmuje się sygnałami (przebiegami czasowymi lub obrazami) o wartościach, które są liczbami rzeczywistymi lub zespolonymi. Pojawił się jednak w literaturze szereg zastosowań, w których sygnały reprezentuje się za pomocą abstrakcyjnych struktur, np. elementów algebr hiperzespolonych (które są uogólnieniem liczb rzeczywistych i zespolonych). Szczególny nacisk w naszym projekcie położony jest na algebrę oktonionów, tzn. liczb postaci

$$o = x_0 + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 + x_4\mathbf{e}_4 + x_5\mathbf{e}_5 + x_6\mathbf{e}_6 + x_7\mathbf{e}_7, \qquad x_0, \ldots, x_7 \in \mathbb{R},$$

w których występuje siedem różnych jednostek urojonych (każda z nich ma własność $\mathbf{e}_i^2 = -1$). Mnożenie w algebrze oktonionów w ogólności nie jest przemienne, ani nawet łączne, co stanowi znaczne utrudnienie przy próbie rozszerzenia na nią wyników znanych dla przestrzeni rzeczywistych i zespolonych.

Praktyczne zastosowania oktonionów do tej pory ograniczały się jedynie do zagadnień fizyki matematycznej i badania innych struktur algebraicznych. Zaczęły pojawiać się jednak prace na temat hiperzespolonych funkcji analitycznych, w których wykorzystuje się pojęcie oktonionowej transformacji Fouriera. Jest to uogólnienie klasycznego narzędzia teorii sygnałów, dobrze zbadanego dla przypadku liczb rzeczywistych i zespolonych. Dotychczas brakowało w literaturze rozważań teoretycznych dotyczących poprawności sformułowanej definicji oraz własności tego przekształcenia. Udało nam się wykonać pierwszy krok w tym kierunku i pokazać poprawność definicji oktonionowej transformacji Fouriera dla funkcji skalarnych (o wartościach rzeczywistych) trzech zmiennych oraz wyprowadzić jej pewne podstawowe własności.

Jesteśmy przekonani o potrzebie dalszego rozwoju tej teorii, m.in. wykazania, że definicja przekształcenia jest poprawna również dla sygnałów o wartościach oktonionowych, wyprowadzenia kolejnych własności istotnych z punktu widzenia przetwarzania sygnałów, czy też rozszerzenia rozważań na przypadek sygnałów o zmiennych dyskretnych. Ze względu na brak podstawowych własności mnożenia, analiza powyższych zagadnień jest bardzo skomplikowana i podatna na błędy. Chcemy wobec tego opracować narzędzie do automatycznych obliczeń (zarówno symbolicznych jak i numerycznych) w postaci pakietów do środowisk Mathematica oraz MATLAB, które ułatwią dalsze prace. Wymienione kierunki badań będą stanowiły główną część tego projektu.

Warto zwrócić uwagę na korzyści, jakie przyniósłby sukces badań nad wspomnianymi zagadnieniami. Znane są w literaturze wyniki rozważań dotyczących zastosowania kwaternionowej transformacji Fouriera w analizie pewnych stacjonarnych systemów liniowych opisywanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi dla funkcji dwóch zmiennych. Pokazują one przewagę hiperzespolonego podejścia do tego zagadnienia nad klasyczną teorią – umożliwia ono niezależne badanie zachowania rozwiązań tych równań względem każdej ze zmiennych. Uzyskanie analogicznych wyników dla oktonionowej transformacji Fouriera umożliwiłoby analizowanie rozwiązań pewnych równań różniczkowych cząstkowych dla funkcji trzech zmiennych niezależnie dla każdej ze zmiennych. Otworzy to drogę do konkretnych praktycznych zastosowań omawianej teorii.