Jądra ciepła: konstrukcja i oszacowania

Równanie ciepła $\partial_t = \Delta$ to równanie o fundamentalnej roli w fizyce, gdyż pozwala ono modelować rozchodzenie się ciepła. Rozwiązaniem fundamentalnym tego równania jest funkcja $g(t,x) = (4\pi t)^{-d} e^{-|x|^2/4t}$, znana pod nazwą jądro Gaussa-Weierstrassa. Oznacza to, że gdy dany jest rozkład temperatury w chwili początkowej $t = 0$, przy użyciu funkcji $g(t,x)$ możemy wyznaczyć temperaturę w każdej chwili $t > 0$ i punkcie przestrzeni x.

Funkcja $g(t,x)$ odgrywa także bardzo ważną rolę w teorii procesów stochatycznych, które są matematycznymi modelami zjawisk losowych. Pierwszym fundamtnalnym przykładem takich procesów jest proces Wienera, inaczej zwany też ruchem Browna. Został on zaproponowany w roku 1900 przez L. Bacheliera do badania cen na giełdzie, później stosowany także przez A. Einsteina i M. Smoluchowskiego do opisu ruchów Browna (chaotycznego ruchu cząsteki w cieczy, np. pyłku w wodzie). Przy pewnych założeniach na model, funkcja $g(t,x)$ wpełni charakteryzuje proces Wienera. W szczególności, pozwala wyznaczać prawdopodobieństwo z jakim cząstka znajdzie się w wybranym obszarze cieczy po ustalonym czasie t. Z tego powodu $g(t,x)$ nazywamy także gęstością przejścia procesu.

Innym ważnym przykładem procesu stochastycznego jest proces Poissona. Wartość tego procesu w chwili t można interpretować jako (losową) ilość sygnałów, lub ogólniej pewnych zdarzeń, do chwili t. Służył on już na początku XX wieku do analizy prac central telefonicznych i badania kapitału firm ubezpieczeniowych. Należy zauważyć, że realizacje (tzw. trajektorie) procesu Poissona posiadają skoki. Pojawiają się one w chwilach przyjścia sygnałów. Trajektorie processu Wienera są nastomiast ciągłe.

Niemniej jednak oba procesy są reprezentantami tej samej większej klasy procesów stochastycznych znanych jako procesy Lévy'ego. Większość z nich posiada trajektorie ze skokami, które opisane są miarą Lévy'ego (miarą skoków), i których struktura jest dużo bardziej skomplikowana niż w przypadku processu Poissona. Należy też zauważyć, że gdy proces Lévy'ego posiada gęstość przejścia $p(t,x)$, wyznaczenie jej jawnym wzorem może być niemożliwe. W takim przypadku uzyskanie dokładnych oszacowań, asymptotyk i własności regularności $p(t,x)$ odgrywa ważną rolę. Opisany powyżej związek między równaniem ciepła a gęstością przejścia procesu Wienera nie jest przypadkowy. Podobne relacje zachodzą między równaniami postaci $\partial_t = A$, gdzie A to tzw. generator procesu Lévy'ego, a rozkładami procesów Lévy'ego. Moglibyśmy w tym kontekście mówić o jeszcze szerszej klasie procesów, o tzw. procesach Markowa. Generatory procesów (Markowa), których trajektorie posiadają skoki nazywamy operatorami nielokalnymi, a ich gęstości przejścia (z uwagi na kontekst) jądrami ciepła.

W ostatnich latach można dostrzec zwiększające się zainteresowanie operatorami nielokalnymi, ponieważ pozwalają one na tworzenie dokładniejszych modeli w fizyce, chemii, biologii czy ekonomii. Stosowane są do opisu ewolucji nieliniowych fal, dynamiki płynów czy w badaniach polimerów. Czasem modele takie budowane są na przestrzeniach innych niż euklidesowe, aby móc badać struktury takie jak kryształy.

Cele projektu

Projekt obejmuje zagadnienia z procesów stochastycznych, cząstkowych równań różniczkowych z operatorami nielokalnymi, analizy funkcjonalnej, teorii potencjału oraz analizy harmonicznej. Dotyczy on badania operatorów nielokalnych na przestrzeniach euklidesowych oraz strukturach dyskretnych i obejmuje trzy zadania badawcze: (1) *analiza jąder ciepła na przestrzeniach euklidesowych*; (2) *asymptotyka i oszacowania półgrup na obszarach*; oraz (3) *jądra ciepła na strukturach dyskretnych*. W szczególności zbadamy jądra ciepła operatorów nielokalnych z niesymetrycznymi miarami Lévy'ego, operatorów Dunkla oraz subordynatorów. Na obszarach zbadamy procesy, których miary opisujące skoki procesu nie są absolutnie ciągłe. Opiszemy także asymptotyczne zachowanie jąder ciepła w pobliżu brzegu oraz asymptotykę spektralnego ciepła całkowitego. Na strukturach dyskretnych zbadamy jądra ciepła spacerów losowych. Rozważane przez nas modele to między innymi budynki afiniczne i kryształy topologiczne.