

Rozmieszczenie wartości funkcji typu dzeta i funkcji typu L

Jedną z ważniejszych współcześnie rozwijanych gałęzi teorii liczb jest tzw. analityczna teoria liczb. Jej podstawowym zagadnieniem jest stosowanie analitycznych własności tzw. zespolonych funkcji typu dzeta i funkcji typu L do badania obiektów arytmetycznych, algebraicznych i geometrycznych. Funkcje te jako uogólnienia klasycznej funkcji dzeta Riemanna są pewnego rodzaju funkcjami tworzącymi badanych obiektów arytmetycznych, algebraicznych i geometrycznych. Ważnym zagadnieniem badawczym dotyczącym tej klasy funkcji jest rozmieszczenie przyjmowanych przez nie wartości na prostych pionowych leżących w tzw. pasie krytycznym. Problematyka ta wymaga użycia zaawansowanych i subtelnych metod pochodzących z teorii funkcji analitycznych i klasycznej teorii liczb. Lepsze zrozumienie rozmieszczenia wartości funkcji typu dzeta i typu L pozwoli, na zastosowanie z większą dokładnością technik teorii funkcji analitycznych, co nierzadko przekłada się na uzyskanie nowych wyników dotyczących zasadniczych obiektów arytmetyki czy algebry.

Jak wiadomo, wartości funkcji typu dzeta lub typu L zachowują się dosyć nieregularne w pasie krytycznym. Dla przykładu można pokazać, że zarówno funkcja dzeta Riemanna jak i jej odwrotność przyjmują duże wartości tzw. wartości ekstremalne na dowolnie ustalonej prostej pionowej w pasie krytycznym. Istotne jest oczywiście podanie oszacowań dolnych dla przyjmowanych wartości ekstremalnych. Tematyka ta jest dosyć dobrze zbadana dla funkcji dzeta Riemanna, głównie dzięki wynikom uzyskanym w ostatniej dekadzie. Natomiast znane rezultaty w tym kierunku dotyczące ważnych uogólnień funkcji dzeta Riemanna są wciąż daleki od oczekiwanych. Dlatego jednym z głównych celów naukowych projektu jest przeprowadzenie badań w kierunku poprawienia znanych wyników, w szczególności lepszego oszacowania dolnego dla wartości ekstremalnych funkcji typu L oraz charakteryzacja punktów na prostej pionowej, gdzie dana funkcja przyjmuje wartości ekstremalne.

Innym ważnym zagadnieniem analitycznej teorii liczb świadczącym o nieregularności wartości funkcji typu dzeta i typu L jest własność uniwersalności. Krótko mówiąc, mówi ona, że patrząc na wykres funkcji dzeta Riemanna ograniczonego do pasa krytycznego można znaleźć tam wszystkie funkcje analityczne. Świadczy to o bogactwie wartości funkcji dzeta Riemanna oraz o pewnej wyjątkowości tego typu funkcji wśród pozostałych funkcji analitycznych. Począwszy od lat 90-tych ubiegłego stulecia teoria ta została przeniesiona na wiele pozostałych funkcji typu dzeta i typu L . Wciąż brakuje jednak efektywnych wersji tego twierdzenia, które prawdziwe byłyby dla szerokiej klasy funkcji. Ważnym krokiem w tym kierunku i jednocześnie kolejnym celem badawczym byłoby zbadanie i scharakteryzowanie gęstości zbioru parametrów t , dla których dana funkcja analityczna zostałaby przybliżona przez przesunięcia funkcji dzeta o it . Inny cel naukowy projektu dotyczyć będzie tzw. łącznej uniwersalności, która mówi, że dowolne funkcje analityczne można przybliżać przez te same przesunięcia danej kolekcji funkcji L . Jednym z zagadnień podjętym w projekcie będzie poszukiwanie nowych typów twierdzeń o łącznej uniwersalności związanej z rozpatrywaniem przesunięć innego typu niż o it . Twierdzenia tego typu dostarczają nowych informacji dotyczących pewnego typu niezależności między funkcjami typu L .

Osiągnięcie wszystkich powyższych celów planowane jest dzięki użyciu nowoczesnych metod analitycznej teorii liczb. Problematyka badawcza projektu jest w centralnym nurcie zagadnień podejmowanych przez współczesnych teoretyków liczb, a jej nowe wyniki pozwolą lepiej zrozumieć fenomen funkcji typu dzeta i funkcji typu L .