Punktowa teoria regularności dla zbiorów, miar i warifoldów

Sławomir Kolasiński

Wyobraźmy sobie okrąg z giętkiego drutu. Wygnijmy ten drut w jakiś fantazyjny kształt (można zrobić z niego jakiś węzeł ale nie zaciskać) i zanurzmy go w roztworze mydła. Wyciągnąwszy drut z mydła otrzymamy błonę mydlaną (*powierzchnię*) ograniczoną (*rozpinającą*) drut. Łatwo można stworzyć takie błony mydlane, które będą miały samoprzecięcia, które nazywamy *osobliwościami.* Teoretycznie jest mnóstwo innych typów osobliwości, które mogą się pojawić. W ogólności punkt na powierzchni nazywamy *osobliwym* jeśli coraz mniejsze otoczenia tego punktu w rozważanej powierzchni nie stają się coraz bliższe pewnej dwuwymiarowej płaszczyzny przy skalowaniu.

Matematycy modelują błony mydlane za pomocą tzw. *powierzchni minimalnyc*, tj. powierzchni, których średnia krzywizna jest zerowa. Rozpatrujemy także „powierzchnie" wymiaru m innego niż 2 leżące w przestrzeni (euklidesowej bądź nie; np. wszechświat (tj. czasoprzestrzeń Einsteina) nie jest euklidesowa) wymiaru n innego niż 3 – oczywiście brzeg takiej powierzchni będzie wówczas wymiaru $m - 1$.

Powierzchnie minimalne wymiaru 1 to po prostu najkrótsze ścieżki (*geodezyjne*) łączące dwa punkty (w tym przypadku brzeg ma wymiar $m - 1 = 0$). Dwuwymiarowe powierzchnie minimalne bywają użyteczne dla architektów, którzy chcą budować urozmaicone niezbyt płaskie budynki ale muszą minimalizować napięcia wewnątrz ścian i dachów. W ogólnej teorii względności nasze powierzchnie również grają ważną rolę przy badaniu wszechświata.

Mówimy, że powierzchnia jest *regularna* jeśli w ogóle nie ma osobliwości. Wiele pytań dotyczących regularności powierzchni minimalnych wciąż czeka na odpowiedź. Jak często mogą występować osobliwości? Jakiego rodzaju osobliwości mogą się przydarzyć? Celem naszego projektu jest podanie częściowych odpowiedzi na te pytania. Ponadto zamierzamy badać nie tylko powierzchnie minimalne (średnia krzywizna zero) ale również inne niezbyt dzikie powierzchnie (średnia krzywizna nie zmienia się zbyt gwałtownie) oraz rozwiniemy nowe matematyczne narzędzia, które będzie można wykorzystać do badania dość ogólnych podzbiorów przestrzeni Euklidesowej.