„Metody kombinatoryczne w geometrii algebraicznej i algebrze przemiennej”

Mateusz Michałek, Instytut Matematyczny PAN

W ramach niniejszego projektu chcemy wnieść znaczący wkład w rozwiązanie szeregu problemów leżących pomiędzy algebrą, a kombinatoryką. Styk tych dwóch działów jest ostatnio szczególnie szybko rozwijającym się obszarem matematyki, ponieważ umożliwia wykorzystanie zarówno metod algebry, czy geometrii algebraicznej, jak i metod kombinatorycznych. Ich połączenie jest wyjątkowo silne – z jednej strony metody wypracowane w algebrze mają często charakter globalny, z kolei kombinatoryka bywa nazywana „nanotechnologią” matematyki.

Projekt składa się z czterech części. Dla każdej z nich wyróżniamy szczegółowe cele:

0.1. **Wielomiany hiperboliczne i funkcje kompletnie monotoniczne.** Wielomian jednorodny P, o współczynnikach rzeczywistych, jest nazywany hiperbolicznym względem wektora rzeczywistego v jeśli dla każdego wektora rzeczywistego y mamy $P(v+iy) \neq 0$. Wielomian jest nazywany hiperbolicznym jeśli istnieje choć jeden wektor v o powyższej własności. Funkcja f określona na $(0,\infty)^n$ jest kompletnie monotoniczna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych wektorów $u_1,\dots,u_k \in (0,\infty)^n$ mamy:

$$(-1)^k \frac{\partial^k f}{\partial_{u_1}\cdots\partial_{u_k}} \geqslant 0.$$

Zamierzamy badać kombinatoryczne i algebraiczne własności wielomianu hiperbolicznego P, a w szczególności rozstrzygnąć hipotezy dotyczące kompletnej monotoniczności funkcji $P^{-\beta}$.

0.2. **Nierówności opisujące objętość zbioru różnicowego.** Zbiór różnicowy $D(K)$ wypukłego obszaru $K \subset \mathbb{R}^n$ jest sumą Minkowskiego $D(K) = K - K$. Fundamentalnymi nierównościami szacującymi objętość zbioru różnicowego w zależności od objętości K, są

$$2^n \operatorname{Vol}_n(K) \leqslant \operatorname{Vol}_n(D(K)) \leqslant \binom{2n}{n}\operatorname{Vol}_n(K).$$

Celem jest udowodnienie hipotezy Godbersena, która jest wzmocnieniem prawej strony powyższej nierówności.

0.3. **Wielomian chromatyczny matroidu.** Gdy do wielomianu chromatycznego grafu podstawimy -1, otrzymamy ilość jego acyklicznych orientacji krawędziowych. Naszym celem jest znalezienie analogicznego twierdzenia o wzajemności dla wielomianu chromatycznego matroidu (tzn. dla wielomianu, który przyporządkowuje liczbie n liczbę poprawnych (elementy pokolorowane tym samym kolorem tworzą zbiór niezależny) kolorowań kolorami ze zbioru $\{1,\dots,n\}$).

0.4. **Problem krzyżujących się wektorów.** Celem ostatniej części projektu jest rozwiązanie problemu z zakresu kombinatoryki ekstremalnej, dotyczącego wyznaczenia maksymalnej liczności rodziny wektorów w $\mathbb{Z}^w$, które się parami 1-krzyżują, ale nie k-krzyżują. Jedną z implikacji byłoby rozwiązanie pewnego naturalnego problemu z teorii częściowych porządków.