

POPULARNONAUKOWE STRESZCZENIE PROJEKTU

Celem projektu jest badanie powiązań między dwiema ważnymi dziedzinami matematyki czystej: teorią ergodyczną i dynamiką topologiczną. Istnieją między nimi głębokie związki i zamierzamy wykorzystać idee oraz techniki teorii ergodycznej w celu rozwiązywania problemów dynamiki topologicznej, a także odwrotnie.

Dynamika topologiczna i teoria ergodyczna to gałęzie ogólniejszej dziedziny, jaką są układy dynamiczne. Przykładami takich układów są: układ słoneczny, pogoda, wytwarzanie białych krwinek, ruch kul bilardowych po stole, ruch cząsteczek gazu w pojemniku, rozpuszczanie się cukru w filiżance kawy, kursy giełdowe, tworzenie się korków drogowych itd. Istnieje wiele różnic między tymi i licznymi innymi przykładami w fizyce, biologii, chemii, inżynierii, matematyce, ekologii itp., wszystkie jednak można modelować za pomocą *przestrzeni fazowej* oraz *reguły ewolucji*. Przestrzeń fazowa składa się ze wszystkich możliwych *stanów świata* (np. położenia i prędkości planet układu słonecznego), natomiast reguła ewolucji to przekształcenie przypisujące każdemu stanowi świata (reprezentującemu „aktualną” sytuację układu) stan świata reprezentujący sytuację układu „jedną jednostkę czasu później”.

Modelowanie układu dynamicznego wiąże się z zachowaniem pewnych informacji, a odrzuceniem innych. Należy na przykład zdecydować, czy cząsteczka gazu będzie reprezentowana jako punkt, kula, czy bardziej złożona struktura. W dynamice topologicznej informacja jest zachowywana jako „bliskość” stanów świata, określona na przykład jako funkcja odległości $d(x,y)$ między wszystkimi parami (x,y) stanów świata. W teorii ergodycznej informacja jest zachowywana jako względne prawdopodobieństwo różnych stanów. Odrzucenie niektórych informacji opisujących rzeczywisty świat pozwala matematykom dostrzec „ogólny obraz” i odkryć uniwersalne zasady.

Omówmy teraz dwa główne problemy, którymi zamierzamy się zająć w projekcie. Dla przejrzystości przedstawimy tylko ogólny zarys najważniejszych idei.

Rozważmy lotnisko, które kontaktuje się z przylatującymi i odlatującymi samolotami za pomocą pewnego pasma częstotliwości radiowych. Przepisy zabraniają innym podmiotom korzystania z tego pasma, aby zapewnić bezpieczne starty i lądowania, ale pirackie stacje radiowe często łamią prawo i nadają w tym paśmie na zmieniających się częstotliwościach. Chcemy modelować ten problem za pomocą dynamiki topologicznej i zapewnić (przynajmniej teoretycznie) możliwość sprawnego znajdowania częstotliwości wykorzystywanych przez piratów. Naukowcy opracowali już model probabilistyczny, który zapewnia skuteczność 99%, ale nie 100%. Zamierzamy wykorzystać głębokie powiązania między teorią ergodyczną a dynamiką topologiczną, aby ulepszyć istniejący model, zapewniając 100% skuteczności, a tracąc jednocześnie jak najmniej efektywności.

Drugi problem, którym zajmiemy się w projekcie, polega na wykazaniu, że niektóre średnie w układach ergodycznych, tzw. *niekonwencjonalne średnie ergodyczne*, są zbieżne, czyli mają granice. Idąc w przeciwnym kierunku niż w poprzednim przykładzie, zamierzamy wykorzystać dynamikę topologiczną jako narzędzie do rozwiązania tego problemu, a dokładniej, zamierzamy modelować układy ergodyczne za pomocą pewnego układu topologicznego o dobrych właściwościach.

Reasumując, teoria ergodyczna i dynamika topologiczna są dwoma ważnymi dziedzinami matematyki czystej, między którymi istnieją głębokie powiązania. Dzięki znalezieniu nowych związków między tymi dziedzinami projekt pomoże w lepszym zrozumieniu obu tych tematów.