Układy Liego i wybrane metody teorii Liego w równaniach różniczkowych

Równania różniczkowe, zarówno zwyczajne jak i cząstkowe, stanowią najważniejszy język opisu własności i ewolucji układów fizycznych oraz olbrzymi fragment całości nauk matematycznych. Ogromna jednak większość prac w tej dziedzinie poświęcona jest zagadnieniom analitycznym i obliczeniowym, pozostawiając problemy geometryczne nieco na uboczu. Nie ulega jednak wątpliwości, że najważniejsze typy równań różniczkowych w ten czy inny sposób wiążą się ze specyficzną geometrią (np. symetriami), ukrytą za analityczną ich postacią. Na przykład, jedno z najważniejszych równań nieliniowych, równanie Riccatiego, jest kombinacją trzech pól wektorowych na prostej rzeczywistej (o współczynnikach zależnych od czasu), zamkniętych ze względu na nawias Liego, czyli rozpinających trzywymiarową algebrę Liego pól wektorowych.

Teoria Liego, nosząca nazwę od norweskiego matematyka, Sophusa Lie, który ją zapoczątkował, rodziła się właśnie jako `teoria Galois' dla równań różniczkowych i dopiero swoim późniejszym kształcie przyjęła postać teorii autonomicznych obiektów algebraiczno-geometryczno-różniczkowych, znanych dziś jako grupy i algebry Liego. Są one jednymi z fundamentalnych pojęć i narzędzi współczesnej fizyki i matematyki, pojawiającymi się niemal we wszystkich obszarach tych nauk. Grupy i algebry Liego, czy bardziej ogólne grupoidy i algebroidy Liego, występują najczęściej w kontekście symetrii układów, ich redukcji (odwzorowania momentu) oraz problemów całkowalności. Często jednak pojawiają się w kontekstach nieoczywistych, związanych często z ukrytą, dodatkową strukturą.

Jedną z najciekawszych takich właśnie własności układu jest istnienie, na ogół nieliniowych, zasad składania rozwiązań (superpozycji). Taka zasada superpozycji jest na ogół rozumiana jako funkcja produkująca nowe rozwiązania (zależne od parametru) z podstawienia znanych rozwiązań; w sytuacji idealnej – wszystkie rozwiązania, przy znajomości pewnego, skończonego zbioru rozwiązań `niezależnych'. Jest to poniekąd substytut całkowalności w sytuacji, gdy na całkowalność równania nie ma nadziei. Najprostszym przykładem układu dopuszczającego zasadę superpozycji jest układ liniowych równań różniczkowych pierwszego rzędu: każde rozwiązanie jest tutaj kombinacją liniową maksymalnego zbioru rozwiązań niezależnych. Od Sophusa Lie pochodzi twierdzenie mówiące, że układy dopuszczające zasady składania rozwiązań (nazywane teraz często *układami Liego*) są, jak równanie Riccatiego, kombinacjami rodziny pól wektorowych, rozpinających skończenie-wymiarową algebrę Liego pól wektorowych.

Przedstawiony projekt badawczy dotyczy zarówno daleko idących uogólnień koncepcji układów Liego, np. tzw. układów quasi-Liego lub układów opartych na algebroidach Liego, w kontekście dodatkowych struktur geometrycznych (symplektycznych, Poissona, Diraka, itp.), jak również takich układów w obrazie stochastycznym lub kontekście teorii supersymetrycznych, czyli układów na superrozmaitościach. Te dwa ostatnie zagadnienia są dotychczas bardzo słabo zbadane i rozumiane. Również problemy symetrii i całkowalności, zarówno w obrazie stochastycznym, kwantowym, jak i supersymetrycznym, będą leżeć w obszarze naszych zainteresowań. Innym, całkowicie nowym zagadnieniem w tym kontekście, będzie próba zrozumienia i rozwinięcia geometrycznego modelu dyskretyzacji układów Liego, zachowującej istnienie superpozycji. Problemy te leżą bez wątpienia na przecięciu najważniejszych zagadnień matematyki i fizyki związanych z geometrycznymi własnościami i jakościową teorią równań różniczkowych.

Dla wykonania projektu powołaliśmy zespół naukowy jednoczący wszystkie chyba najlepsze ośrodki na świecie zajmujące się tą tematyką: IMPAN, Uniwersytet w Saragossie, Uniwersytet w Montrealu oraz Politechnikę w Barcelonie. Każda z grup wnosi nieco odmienne podejście i umiejętności do prezentowanych zagadnień, co czyni cały zespół niezwykle kompetentnym. Wierzymy, że zaproponowany zespół oraz jego kompetencje i doświadczenie tworzą realne podstawy sukcesu tego projektu.