Nr rejestracyjny: 2016/21/B/ST1/03084; Kierownik projektu: dr Mariia Vlasenko

Arytmetyczne własności grup formalnych

STRESZCZENIE
wersja popularnonaukowa

Masha Vlasenko

Grupy formalne mają szerokie zastosowania w teorii liczb, geometrii algebraicznej i topologii algebraicznej, sięgające od kongruencji spełnianych przez współczynniki form modularnych, przez teorię ciał klas, do wyjątkowych K-teorii i grup homotopii sfer. Nasz projekt ma na celu rozwinięcie nowych technik w teorii grup formalnych oraz zastosowanie ich do istotnych problemów w innych działach matematyki.

Aby wyjaśnić jeden z głównych pomysłów naszego projektu, rozważmy prosty przykład. Zbiór punktów na krzywej eliptycznej $E : y^2 = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ posiada naturalną strukturę grupy abelowej, gdzie rolę elementu neutralnego pełni „niewidzialny" punkt $\mathcal{O}$ w nieskończoności. Różniczka $\omega = dx/y$ jest niezmiennicza ze względu na działanie grupowe. Wybierzmy lokalną współrzędną w pobliżu $\mathcal{O}$, na przykład $t = x/y$, i rozwińmy niezmienniczą różniczkę w szereg formalny $\omega = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n dt$. Zakładając, że współczynniki a_1, a_2, a_3 są liczbami wymiernymi, dla prawie wszystkich liczb pierwszych p (pomijamy te, które pojawiają się w mianownikach a_i, b_n oraz w wyróżniku E) zachodzi następująca dychotomia. Jeżeli p dzieli b_{p-1}, wtedy krzywa ma p punktów nad ciałem p-elementowym $\mathbb{F}_p$. W przeciwnym przypadku, ilorazy $b_{p^k-1}/b_{p^{k-1}-1}$ zbiegają w topologii p-adycznej do odwracalnego elementu $u \in \mathbb{Z}_p^\times$ w pierścieniu liczb p-adycznych, zaś liczba punktów E nad $\mathbb{F}_p$ różni się od p o $u + p/u \in \mathbb{Z}$. W rzeczy samej, współczynniki rozwinięcia ω „wiedzą", ile punktów jest na krzywej E nad każdym ciałem skończonym.

Powyższy przykład może być uogólniony do grup formalnych Artina–Mazura stowarzyszonych z grupami kohomologii rozmaitości algebraicznych. W ramach projektu będziemy badali p-adyczne analityczne własności współczynników rozwinięć niezmienniczych różniczek i funkcji symetrycznych na grupach formalnych. Pomimo, że ten temat jest badany od lat 80., nasz projekt bazuje na obserwacjach poczynionych niedawno, biorących się z symetrii lustrzanej.

Odkryta wpierw przez fizyków, symetria lustrzana pozostaje jednym z głównych tematów badań, wiążąc teorię strun z geometrią algebraiczną i arytmetyką. Wiele przykładów sugeruje, że wyrażenie odwzorowania lustrzanego w tak zwanych współrzędnych kanonicznych ma bogate własności arytmetyczne, takie jak modularność czy różnorakie kongruencje. To wyrażenie zawiera w sobie szczególne rozwiązania równań różniczkowych typu Picarda–Fuchsa rodzin rozmaitości Calabiego–Yau w pobliżu punktu osobliwego. Planujemy zastosować techniki teorii grup formalnych w celu zbadania p-adycznych analitycznych własności tego typu funkcji.

Przedmiot naszych badań ma również związek z teorią p-adycznych L-funkcji. Z grupą formalną można stowarzyszyć ciąg liczb, uogólniający w naturalny sposób ciąg liczb Bernoulliego. Powinniśmy być w stanie zastosować nasze techniki w celu p-adycznej interpolacji tych uogólnionych liczb Bernoulliego. Mamy nadzieję na nowe wyniki dotyczące specjalnych wartości p-adycznych L-funkcji, co jest trudnym technicznie tematem, gdzie ostatecznym celem mogłoby być potwierdzenie hipotezy Grossa–Starka w szczególnych przypadkach.