

Niestandardowe problemy paraboliczne w opisie procesów biologicznych

Układy równan parabolicznych są potężnym narzędziem w opisie dyfuzji i reakcji chemicznych jakim podlegają molekuly substancji wewnątrz pewnego zbioru przestrzennego, na brzegu którego zadane są warunki brzegowe wiążące zazwyczaj strumienie (pochodne normalne stężeń) z wartościami rozwiązania na brzegu. Współczesna biologia dostarcza jednak wielu przykładów zjawisk, dla opisu których ta standardowa postać równań jest niewystarczająca. Możliwe są bowiem sytuacje, w których zarówno struktura układu równań, jak i warunki brzegowe mogą być różne od tradycyjnych.

A. Warunki brzegowe wyrażają się poprzez rozwiązania innego układu równań zdefiniowanych na brzegu obszaru. Równania te opisują pewne specyficzne procesy mające miejsce na brzegu obszaru. W pewnych istotnych z punktu widzenia zastosowań przypadkach strumienie brzegowe mogą również zależeć od pochodnych rozwiązania względem czasu i ewentualnie zmiennych przestrzennych. Przykładem mogą być układy składające się z dwu podukładów równań parabolicznych sprzężonych poprzez warunek brzegowy: Co więcej, jeden z tych podukładów może opisywać zjawiska wewnątrz obszaru a drugi zjawiska zachodzące na jego brzegu. Taka sytuacja ma miejsce np. gdy próbujemy opisać procesy zmiany stanu komórki pod wpływem różnego rodzaju bodźców zewnątrzkomórkowych. Następuje wtedy zmiana stanu protein znajdujących się na membranie komórkowej (tzw. receptorów). Takie pobudzone receptory mogą wpływać na stan wewnątrzkomórkowych przekaźników sygnałowych, tzw. kinaz cytozolicznych.

B. Elementy układów biologicznych mogą również posiadać strukturę wewnętrzną (wewnętrzne stopnie swobody). Sytuacja taka pojawia się, jeśli rozpatrywać molekuly, np. komórki, podlegające procesom dyfuzji, posiadają dodatkowe stopnie swobody związane np. ze stężeniem pomocniczych protein lub kompleksów protein (cytozolicznych lub membranowych), które nie mogą dyfundować swobodnie, ponieważ ich położenie jest zadane poprzez położenie ich komórki-nosnika. Opis matematyczny takiego układu biologicznego zawiera równania istotnie różniące się od standardowych równań z niezdegenerowanym operatorem dyfuzji.

C. Jeszcze inne warunki brzegowe pojawiają się w opisie wielu procesów biologicznych, w których przepływ przez brzeg obszaru zależny jest od pochodnej czasowej rozwiązania. Są to tzw. dynamiczne problemy brzegowe. Bezpośrednią motywacją do zajęcia się tym zagadnieniem był dla nas fakt odkrycia bardzo szybkich fal biegnących wapnia o prędkości propagacji znacznie przewyższającej prędkości 'zwykłych szybkich' fal wapniowych w komórkach/ Fale takie, obserwowane doświadczalnie, które nazywa się czasem w skrócie falami CICI (calcium induced calcium influx) poruszają się z prędkością do $1000 \mu\text{m/s}$, a więc kilkadziesiąt razy większa niż zwykłe fale propagujące się w oparciu o tzw. mechanizm autokatalityczny wpływ wapnia z magazynów wewnątrzkomórkowych.

Celem projektu jest analiza problemów związanych z opisem powyżej scharakteryzowanych typów zjawisk. Oprócz rezultatów matematycznych pozwoli to na lepsze zrozumienie biologii rozpatrywanych procesów. Co więcej, mogą one mieć również pewne znaczenie medyczne. Np. analiza modelu formowania się złożeń arteriosklerotycznych i warunków jego wzrostu może dać nowe informacje na temat czynników ryzyka w zjawiskach arteriosklerotycznych. Mamy nadzieję, że nasze badania wniosą wkład do modelowania problemów sygnalizacji komórkowej i odpowiedzi na pytanie, jak sygnały odbierane przez receptory membranowe są przekazywane do wnętrza komórki. Analiza równań z dynamicznym warunkiem brzegowym będzie istotne w zrozumieniu propagacji bardzo szybkich fal wapniowych w komórkach. Mamy, w szczególności, nadzieję, że będziemy mogli odpowiedzieć na pytanie: Czy fale CICI mogą propagować się bez istotnego udziału wewnątrzkomórkowych magazynów wapniowych (retikulum cytoplazmatyczne i mitochondria). Badania nasze dostarczyć również nowych informacji na temat procesów koagulacji/kondensacji/aglutynacji komórek, jak również formowania się struktur morfogenetycznych (np. wzorców kostnych).