Wielowymiarowe sito Selberga, k-krotki liczb prawie pierwszych oraz liczby pierwsze w postępach arytmetycznych

Paweł Karasek

Liczby pierwsze fascynowały matematyków od starożytności. Do dziś są one głównym obiektem badań analitycznej teorii liczb. Istnieje wiele hipotez skupionych wokół nich jak np. hipoteza liczb bliźniaczych czy też ogólniejsza hipoteza Hardy'ego-Littlewooda o k-krotkach, z której wynika np. istnienie nieskończenie wielu takich n, że wszystkie elementy zbioru $\{n, n+2, n+6, n+8\}$, który jest szczególnym przypadkiem krotki dopuszczalnej, są pierwsze. Hipoteza ta znajduje się poza zasięgiem aktualnie znanych metod, jednak po jej odpowiednim osłabieniu, staje się zupełnie możliwa do zaatakowania. Np. Maynard pokazał, że każda dopuszczalna trójka (np. $\{n, n+2, n+6\}$) dla nieskończenie wielu n składa się z liczb, które zawierają łącznie co najwyżej 7 czynników pierwszych. Podobne wyniki istnieją także dla innych k.

Pierwszym celem projektu będzie zbadanie, czy wielowymiarowe sito Selberga - metoda, dzięki której osiągnięto w ostatnich latach wiele wspaniałych wyników w teorii liczb - pozwoli na poprawienie aktualnie znanych rekordów; chcielibyśmy znaleźć jak najmniejsze r_k takie, żeby każda dopuszczalna k-krotka dla nieskończenie wielu n zawierała łącznie co najwyżej r_k czynników pierwszych.

Rezultaty, takie jak te opisane powyżej, osiąga się zazwyczaj dzięki silnym narzędziom, które pozwalają na dokładne szacowanie liczby liczb pierwszych w ciągach arytmetycznych. W kontekście teorii sit, klasycznym przykładem jest tw. Bombieri'ego−Winogradowa. Drugi z celów projektu polega na numerycznym zbadaniu, w jaki konkretnie sposób twierdzenie to można wzmocnić. Głównym obiektem zainteresowań bedzie hipoteza Elliotta-Halberstama; chcielibyśmy zbadać, jakiego rzędu wielkości naprawdę jest łączny błąd opisywany tę hipotezę, który może być potraktowany jako funkcja jednej zmiennej. Dzięki takiemu podejściu można także sporządzić wykres obrazujący jego wielkość dla dużych argumentów oraz odkryć ciekawe, nieznane dotąd właściwości liczb pierwszych.

Zarówno badanie hipotezy Elliotta−Halberstama jak i krotek liczb prawie pierwszych jest ważne z tego samego powodu - dzięki nim wiele dowiadujemy się o liczbach pierwszych. W pierwszym przypadku bardzo bezpośrednio, jako że hipoteza dotyczy rozmieszczenia liczb pierwszych w postępach arytmetycznych, natomiast w drugim przypadku urok liczb prawie pierwszych polega przede wszystkim na tym, że w bardzo dużym stopniu przypominają one liczby pierwsze. Dzięki temu stanowią one swoisty poligon doświadczalny dla metod, które tworzymy do zgłębienia struktury ukrytej za liczbami pierwszymi. W ten sposób bardzo dokładnie poznajemy takie ograniczenia naszych technik jak np. problem parzystości. Być moze dzięki temu kwestie te będą lepiej zrozumiane w przyszłości i ostatecznie rozwiązane.