POPULARNONAUKOWE STRESZCZENIE PROJEKTU "PROCESY LÉVY'EGO I GRUPY KWANTOWE – PRZYKŁADY, WŁASNOŚCI, KLASYFIKACJE"

DR ANNA WYSOCZAŃSKA-KULA (UNIWERSYTET WROCŁAWSKI)

W otaczającym nas świecie, zarówno w przyrodzie, jak i architekturze czy sztuce, pojawia się wiele obiektów symetrycznych, czyli takich, które po wykonaniu pewnego naturalnego przekształcenia (płaszczyzny lub przestrzeni) wyglądają tak samo jak przed przekształceniem. Na przykład, jeśli wierzchołki figury nie są rozróżnialne (ponumerowane lub pokolorowane), nie da się odróżnić kwadratu od kwadratu obróconego o 90 stopni. Także w fizyce wiele zasad zachowania (energii, pędu, etc.) można opisać jako symetrie pewnych przestrzeni. Matematycznie symetrie ustalonego obiektu tworzą struktury zwane grupami. Oznacza to między innymi, że dwa przekształcenia symetryczne wykonane jedno po drugim też są symetrią.

W świecie kwantowym, w którym zachodzi między innymi zasada nieoznaczoności Heisenberga, od dawna trwają poszukiwania obiektów opisujących kwantowe odpowiedniki pojęcia symetrii (tzw. 'kwantowe symetrie') oraz wyjaśniające zjawisko łamania symetrii. Jedną z takich prób jest teoria zwartych grup kwantowych, stworzona przez S. L. Woronowicza na przełomie lat 80/90 ubiegłego wieku, która okazała się być bardzo bogata i interesująca także jako obiekt matematyczny. Teoria ta łączy w sobie aspekty algebraiczne, które opisują strukturę grupy w świecie kwantowym, z aspektami topologicznymi, które pozwoliły rozwinąć dla tej teorii cały szereg analitycznych metod badawczych. Teoria ta jest także jedną z 'nieprzemiennych' dziedzin matematycznych, czyli takich w których opisywane obiekty zależą od kolejności ich zastosowania. Innymi takimi teoriami są geometria nieprzemienna i nieprzemienna probabilistyka.

Obecnie znamy wiele przykładów zwartych grup kwantowych - powstają one np. jako jednoparametrowe deformacje klasycznych grup Liego (np. najbardziej znana specjalna grupa unitarna $SU_q(2)$) albo jako modyfikacje grup symetrii, w których rezygnujemy z założenia o przemienności generatorów (jest to proces zwany 'uwolnieniem' grupy). Często tę samą grupę kwantową można opisać różnymi metodami, a każda z nich przynosi dodatkowe informacje o badanym obiekcie. Jest tak w przypadku dwóch rodzin, które chciałabym bliżej zbadać: jedna z nich powstaje przez deformacje grup klasycznych, a druga – przez proces uwalniania. Obie można jednak opisać poprzez tzw. dualność Tannaki-Kreina, przy czym w drugim przypadku w opisie pojawiają się dodatkowe struktury kombinatoryczne. Co zatem łączy obie rodziny? Czy dla pierwszej rodziny można znaleźć analogiczną strukturę kombinatoryczną? Odpowiedź na te pytania pomoże lepiej zrozumieć obie rodziny grup kwantowych oraz ich związki z nieprzemienną probabilistyką.

Grupy kwantowe są przykładami nieprzemiennych przestrzeni, na których mogą być definiowane procesy stochastyczne, w szczególności procesy Lévy'ego. Te ostatnie to procesy o niezależnych i stacjonarnych przyrostach, które w świecie klasycznym mają wiele zastosowań do opisu zjawisk losowych, np. ruchu Browna cząsteczek lub kształtowania się cen instrumentów finansowych (np. akcji na giełdzie). W teorii grup kwantowych nie są znane (przynajmniej na razie) bezpośrednie ich zastosowania w fizyce kwantowej. Wiadomo jednak już teraz, że procesy Levy'ego na grupach kwantowych zawierają w sobie wiele informacji o samych grupach, na których 'żyją'. Można to sobie wyobrazić jako sytuację, w której na podstawie obserwacji ruchów Browna cząsteczek wnioskujemy, że poruszają się one w przestrzeni o ustalonym wymiarze i zakrzywieniu. W moim projekcie zamierzam szukać konkretnych przykładów procesów, które taką informację niosą. Chcę też opisać (sklasyfikować) wszystkie procesy Lévy'ego na wybranych grupach kwantowych, uzupełniając znaną już wiedzę na ten temat. Otrzymane wyniki pozwolą lepiej zrozumieć, czym są grupy kwantowe oraz jakie informacje o nich można znaleźć, badając procesy stochastyczne na nich.