

# Asymptotyczne niezmienniki multiplikatywnej rodziny ideałów jednorodnych

streszczenie popularnonaukowe

Zaproponowana tematyka badawcza została zapoczątkowana w 1974 roku twierdzeniem zawartym w pracy André Galligo. Pokazał on, że jeśli rozpatrywać dla danego ideału  $I$ , jego generyczną zmianę współrzędnych, to otrzymany zostanie ideał jednomianów wiodących, który pozostaje niezmienny w stosunku do jednomianów wiodących ideału wyjściowego. Ideał ten nosi nazwę generycznego ideału inicjującego i jest oznaczany  $\text{gin}(I)$ . Do momentu podania twierdzenia przez Galligo znane były przykłady ideałów, które pozostawały niezmiennie, czyli równe w sensie inkluzji, w przypadku szczególnej zamiany współrzędnych.

Tematyka generycznych ideałów inicjujących, po ukazaniu się pracy Galligo, badana była przez wielu autorów. Zaowocowała ona pracami rozwijającymi początkowo zagadnieniami niezmienników jakie posiada  $\text{gin}(I)$ . Choć ta z pozoru obecna przez lata tematyka wydawać by się mogła już gruntownie zbadana, to ostatnie prace, pokazują, że tematyka może być nadal świeżą i zawiera istotne braki dotyczące powierzchni wyższych wymiarów. Szczególnie ważna seria prac z ostatnich dwóch lat, porusza tematykę geometrycznej interpretacji tego ideału, a także prób jego wyznaczenia w poszczególnych przypadkach. Jest to punkt wyjściowy niniejszej pracy. Zbadanie wąskiej grupy przypadków generycznego ideału inicjującego otwiera wiele możliwości i kierunków badań, których zbadaniem chcę się zająć. Przede wszystkim warte uwagi wydaje się rozszerzenie istniejących już pojęć na przypadki wyżej wymiarowe, ponieważ dotychczasowo najbardziej rozwiniętym tematem są przypadki ideałów, których zbiór miejsc zerowych zawiera się w płaszczyźnie rzutowej. Pomocne w tym celu wydaje się rozszerzenie zagadnienia tzw. obszarów granicznych o przypadki ideałów spełniające warunek multiplikatywności. Pozwoli to pracować nad podanym zagadnieniem nawet w przypadku ideałów, których zbiór miejsc zerowych jest trudny do opisanie, ponieważ zawiera pewne dodatkowe struktury.

W pierwszej fazie badań zostanie podana uogólniona definicja obszaru granicznego związanego z ideałem  $\text{gin}(I)$ . Interesującym polem do zbadania wydaje się być analiza asymptotycznych niezmienników dla  $\text{gin}(I)$ , a więc tworów algebraicznych, z których można wyciągnąć daleko idące wnioski na temat struktury samych ideałów. Jak w swoich pracach pokazał Mark Green, generyczne ideały inicjujące posiadają szereg niezmienników. Z drugiej strony, jak ogólnie wiadomo, wyznaczanie wersji asymptotycznych różnych niezmienników jest często łatwiejsze, niż wyznaczenie ich zwykłych odpowiedników. Gruntowne zbadanie zagadnień niezmienników asymptotycznych jest najważniejszą motywacją pojęcia się tej tematyki. Innym czynnikiem motywującym pojęcia się tego zagadnienia jest związek niezmienników z zagadnieniem potęgi zwykłej oraz symbolicznej ideału, której to badaniem zajmowałem się w ciągu ostatnich lat.

W kolejnej fazie zostaną zanalizowane przypadki generycznych układów prostych w  $\mathbb{P}^3$ . Następnie ich szczególne położenia, w tym klasyczny przypadek dwudziestu siedmiu prostych powstałych po rozdmuchaniu sześciu generycznych punktów w  $\mathbb{P}^2$ . Będzie to punktem wyjścia do próby opisu układów prostych w  $\mathbb{P}^n$ , co również jest brane pod uwagę w niniejszym projekcie.

Celem niniejszego projektu jest zbadanie asymptotycznych niezmienników multiplikatywnych rodzin ideałów jednorodnych, ale też i między innymi funkcji Hilberta czy też diagramów Newtona ideałów. Obiekty te, jak już zostało to wspomniane, są ściśle powiązane z geometrią zbiorów definiowanych przez zbiór zer tych ideałów. Główny akcent we wszystkich przytoczonych przykładach kładziemy na zestawienie istotnych różnic między poszczególnymi niezmiennikami tych układów.

Do zupełnie nowego kierunku rozwoju będzie należało zdefiniowanie nowego rodzaju potęgi ideału, mianowicie zwykłej potęgi ideału wysaturowanej przez ideał maksymalny. Bezpośrednio z definicji wiemy, że powstała struktura nadal jest ideałem, ale napotykamy tu na zupełnie nowe zjawiska. W projekcie zamierzamy rozpocząć badania nad tą nową potęgą, w tym pojąć próbę zdefiniowania niezmienników dla tych ideałów, jako, że nie wszystkie istniejące definicje się na ten przypadek przekładają. Całość zwycięży geometryczna reprezentacja otrzymanych wyników, do których wykorzystane też zostaną narzędzia komputerowe, w tych przypadkach, w których będzie to możliwe.