OPERATORY MAKSYMALNE

Nadrzędnym celem planowanych badań jest głębsze poznanie natury obiektów znanych w literaturze matematycznej jako operatory maksymalne. Aby w przystępny sposób przedstawić problem, warto na początek posłużyć się analogią. Wyobraźmy sobie, że chcemy sprawiedliwie ocenić, jak duży potencjał drzemie w sportowcu uprawiającym daną dyscyplinę. Do wykonania tego zadania musimy przeanalizować jego karierę i wybrać momenty, w których był on w najwyższej formie. Czym jednak jest forma? Mianem tym można określić średnią wartość, jaką pokazuje zawodnik w pewnym okresie. Mimo iż same operatory maksymalne, które działają na funkcjach określonych na pewnej przestrzeni metryczno-miarowej, są nieco bardziej skomplikowanym bytem, taka właśnie była geneza definiowania tego pojęcia. Powyższa idea pochodzi od dwóch brytyjskich matematyków dwudziestego wieku, Godfreya Harolda Hardy'ego i Johna Edensora Littlewooda, z których ten pierwszy był wielkim fanem krykieta.

Operatory maksymalne można definiować na wiele sposobów, przy czym do najczęściej rozważanych wersji zalicza się operator maksymalny scentrowany oraz niescentrowany typu Hardy'ego-Littlewooda. Działanie niescentrowanego operatora maksymalnego w matematycznym sensie można niemal ściśle opisać następująco. Dla pewnej z góry zadanej nieujemnej funkcji f znajdujemy jej funkcję maksymalną Mf w taki sposób, że do wyznaczenia wartości funkcji Mf w pewnym punkcie x wyliczamy średnie wartości funkcji f w różnych obszarach zawierających punkt x, a następnie wybieramy największą z nich. Odwołując się do wcześniejszej analogii powiedzielibyśmy, że odpowiada to sytuacji, w której krytyk sportowy patrzy na zawodnika przychylnym okiem i ocenia jego formę w danym momencie najwyżej, jak tylko to możliwe w ramach jej roboczej definicji. Wyjaśnijmy jeszcze, że wspomniane obszary są topologicznie po prostu kulami. Pojęcie kuli jest wprawdzie znacznie ogólniejsze, jednak w klasycznej sytuacji, to znaczy w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej, pokrywa się ono z pojęciem kuli znanym ze stereometrii. Operator maksymalny scentrowany różni się od niescentrowanego jedynie tym, że brane pod uwagę kule muszą mieć środek w punkcie x.

Teoria operatorów maksymalnych znalazła szerokie zastosowanie w różnych dziedzinach matematyki z analizą harmoniczną na czele. Za pomocą funkcji maksymalnych dowodzi się między innymi klasyczne twierdzenia o różniczkowaniu Lebesgue'a. Ponadto, natura operatorów maksymalnych pozwala oszacować z góry wartości innych obiektów matematycznych, na przykład operatorów opisujących rozchodzenie się ciepła w czasie i przestrzeni przy danych warunkach początkowych. Kluczowa dla zastosowań jest umiejętność ocenienia, jak duża może być funkcja Mf względem wyjściowej funkcji f lub nieco ogólniej, jakie własności funkcji Mf wynikają z jakich własności funkcji f. W najbardziej klasycznych sytuacjach problem ten został już w zadowalający sposób opisany w wielu pracach, wpisujących się dziś w kanon analizy harmonicznej. Jakkolwiek, wciąż pozostaje wiele nie do końca zbadanych aspektów związanych z tą tematyką. Niniejszy projekt zakłada przyjrzenie się różnym mniej typowym własnościom operatorów maksymalnych i opisem warunków, w jakich mogą one zaistnieć. Precyzyjniej, będziemy interesowali się funkcjami f należącymi do zadanych klas, na przykład przestrzeni Lebesgue'a lub Lorentza, i postaramy się opisać, czy i kiedy funkcje Mf również należą do tych samych bądź innych klas przestrzeni, a ich wielkość jest, w terminach przysługujących danym przestrzeniom funkcyjnym, porównywalna z wielkością funkcji wyjściowych f. Wprowadzone w badaniach klasy rozważanych przestrzeni metryczno-miarowych, z którymi stowarzyszone byłyby operatory maksymalne, pozwalałyby możliwie głęboko sięgnąć do natury tych obiektów, by wyszczególnić niektóre ich charakterystyczne cechy, ujawniające się w pewnych szczególnych okolicznościach.