STRESZCZENIE POPULARNONAUKOWE PROJEKTU:

Obliczenia symboliczne na obiektach definiowalnych w logice pierwszego rzędu

Główny wykonawca: Sławomir Lasota

Cel badań. Proponowany projekt należy do matematycznych podstaw informatyki. Głównym celem projektu jest zbadanie, w jakim zakresie możliwe jest przeniesienie algorytmów ze skończonych danych wejściowych na nieskończone, ale skończenie reprezentowane symbolicznie za pomocą formuł logiki pierwszego rzędu. Algorytmy te z natury rzeczy muszą być symboliczne, gdyż nieskończoność wyklucza „naiwne" metody analizujące dane wejściowe w całości.

Przykład. Dla ilustracji problemów, które zamierzamy rozwiązywać oraz metod badawczych, które zamierzamy stosować, rozważmy następujący problem decyzyjny: dla danego grafu G rozstrzygnąć, czy jest on *planarny*, tzn. czy można go narysować na płaszczyźnie? Słynne twierdzenie Kuratowskiego podaje charakteryzację grafów planarnych za pomocą „zabronionych wzorców": graf jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera ani kliki K_5, ani pełnego grafu dwudzielnego $K_{3,3}$, jako minor topologiczny. Wynika stąd natychmiast, że planarność jest rozstrzygalna.

Czy można rozwiązać algorytmicznie problem planarności w przypadku, gdy wejściowy graf jest nieskończony, ale zdefiniowany za pomocą formuły pierwszego rzędu z, powiedzmy, równością? Oto przykład takiego grafu: wierzchołki to pary liczb naturalnych $V = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, a krawędzie $E \subseteq V \times V$ zdefiniowane są za pomocą formuły:

$$(m, n)E(m', n') \iff n = m' \ \vee \ (m = n' \ \wedge \ n = m').$$

Okazuje się, że planarność jest rozstrzygalna dla tak zdefiniowanych grafów nieskończonych, a wynika to z następujących nietrudnych obserwacji. Po pierwsze, twierdzenie Kuratowskiego zachodzi również dla grafów nieskończonych, więc algorytm powinien sprawdzić, czy K_5 albo $K_{3,3}$ jest topologicznym minorem. Po drugie, pytanie, czy ustalony graf skończony jest minorem topologicznym nieskończonego grafu zdefiniowanego w logice pierwszego rzędu redukuje się do problemu spełnialności formuły pierwszego rzędu z równością. Po trzecie, spełnialność logiki pierwszego rzędu z równością jest rozstrzygalna.

Motywacja. Motywacje dla planowanych badań pochodzą z różnorodnych zagadnień informatyki teoretycznej, gdzie w sposób naturalny pojawiają się obliczenia posługujące się symbolicznie opisanymi nieskończonymi podzbiorami dziedziny nieskończonej. Oto killa przykładów takich nieskończonych podzbiorów: zbiór liczb rzeczywistych spełniających ograniczenia czasowe w systemach zależnych od czasu, zbiór programów z dokładnością do przemianowania zmiennych, zbiór dokumentów XML z dokładnością do równości atrybutów.