Operatory różniczkowe nad algebrami nieprzemiennymi.

Badanie przestrzeni wykorzystuje różne podejścia i metody matematyczne – możemy badać zarówno własności topologiczne (rozróżniając wtedy na przykład sferę od torusa) jak i kształty przestrzeni (rozróżniając sześcian od kuli) czy też ich rozmiary. Jedną z efektywnych metod badania przestrzeni jest analiza możliwych typów funkcji i możliwych operacji na nich. Szczególną rolę odgrywają wtedy operacje spełniające pewne reguły, które odpowiadają różniczkowaniu, pozwalające zdefiniować operatory różniczkowe. Obiekty te są podstawą współczesnej geometrii różniczkowej, fizyki matematycznej i teorii równań różniczkowych, w tym wielu równań opisujących istotne procesy fizyczne.

W opisie świata niekoniecznie jednak należy używać przestrzeni i istnieje spora klasa obiektów które odpowiadają przestrzeniom choć używamy jedynie odpowiedników funkcji na nich. Klasycznym już przykładem jest przestrzeń fazowa mechaniki kwantowej, gdzie położenia i pędy obiektów oddzielnie odpowiadają funkcjom na zwykłych przestrzeniach, jednak razem stanowią „nieprzemienną przestrzeń" opisywaną jedynie jako pewna nieprzemienna algebra.

Niekomutatywna geometria zajmuje się badaniem tych obiektów, a jednym z jej ambitnych celów jest opis i badanie algebr („nieprzemiennych przestrzeni") metodami geometrycznymi, podobnie jak geometria różniczkowa służy badaniu własności przestrzeni. Z punktu widzenia geometrii różniczkowej wybrana algebra powinna odpowiadać algebrze funkcji gładkich (odpowiednio regularnych). Geometria nieprzemienna jest zatem badaniem regularności, kształtu i rozmiaru „przestrzeni niekomutatywnych".

Proponowany projekt ma jako główny cel zbadanie stosowalności zaproponowanej niedawno przez autora i współpracowników ogólniejszej definicji operatorów różniczkowych pierwszego rzędu dla nieprzemiennych geometrii. Analiza tej definicji i jej zastosowań a także jej konsekwencji dla pewnych topologicznych konstrukcji będzie podstawowym zadaniem proponowanych badań.

Zaproponowana niedawno konstrukcja jest nowym, świeżym pomysłem niosącym nadzieję na istotny postęp w zrozumieniu i zastosowaniu modeli nieprzemiennej geometrii zarówno do badania algebr i ich niezmienników jak też bezpośredniego zastosowania. W krótkim terminie najistotniejsze wydaje się zweryfikowanie czy pewne uogólnienia symetrii, jak zwarte grupy kwantowe łączą w sobie podobne cechy jak ich klasyczne odpowiedniki (grupy Liego), a w szczególności różniczkowalność działania grupowego.

Podstawowym zastosowaniem wyników w innych dziedzinach badawczych jest możliwość użycia rozszerzonej definicji struktury rzeczywistej w modelach fizycznych używających trójek spektralnych (na przykład do opisu oddziaływań fundamentalnych). Dalsze potencjalnie zastosowanie możliwe będzie w badaniach wykorzystujących twierdzenie o indeksie, jak na przykład klasyfikację (w oparciu o niezmienniki związane z indeksem) modułów projektywnych używanych w opisie dwuwymiarowych struktur fizycznych.