

## WYBRANE ZAGADNIENIA Z POGRANICZA NIELINIOWYCH RÓWNAŃ CZĄSTKOWYCH I GEOMETRYCZNEJ TEORII MIARY

PAWEŁ STRZELECKI

### POPULARNONAUKOWE STRESZCZENIE PROJEKTU

Celem niniejszego projektu jest badanie nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych z pogranicza geometrii i rachunku wariacyjnego, w tym dowodzenie twierdzeń o istnieniu i regularności rozwiązań oraz badanie własności pojedynczych rozwiązań i klas rozwiązań, ze szczególnym uwzględnieniem *osobliwości rozwiązań*.

Sam rachunek wariacyjny należy do dziedzin matematyki, których korzenie sięgają starożytności. Rozwiązanie zagadnienia izoperymetrycznego – orzekające, że wśród figur płaskich o stałym obwodzie największe pole ma koło – było sygnalizowane w słynnej historii o Dydonie, córce króla Tyru. Koliste kształty planów licznych średniowiecznych miast widać w znanym szesnastowiecznym atlasie Brauna i Hogenberga nie dlatego, że koło ma jakiś szczególny urok, ale dlatego, że taki właśnie kształt zapewnia minimalny wydatek na budowę murów, chroniących obszar o ustalonej powierzchni. Dach stadionu olimpijskiego w Monachium ma kształt powierzchni minimalnej nie tylko z powodu ekscentrycznego charakteru architekta<sup>1</sup>, ale i dlatego, że taka konstrukcja zapewnia minimalną masę pokrycia dachowego o ustalonym konturze.

Liczne zagadnienia z rachunku wariacyjnego badają fizycy i konstruktorzy, poszukujący stabilnych położenia równowagi takich obiektów, których stan opisany jest nie przez jeden czy dwa różne parametry, ale przez (potencjalnie) nieskończenie wiele różnych parametrów – np. jako wykres dowolnej funkcji jednej czy kilku zmiennych. Co ciekawe, różne problemy, które chciałoby się opisywać za pomocą funkcji nie tylko ciągłych, ale i *gładkich*, mają naturalne *osobliwości*: przyroda zna np. samoprzecięcia błon mydlanych, defekty ciekłych kryształów, wiry Abrikosowa w nadprzewodnikach. Opis struktury, rozmiarów, położenia takich defektów rozwiązań, oraz pytania o ich stabilność lub niestabilność (albo o warunki, które zapewniają nieobecność takich defektów), prowadzą do trudnych, czysto matematycznych problemów z pogranicza geometrii i analizy, wymagających mieszanki bardzo różnorodnych metod.

Wielowymiarowe zagadnienia wariacyjne prowadzą do równań różniczkowych, których rozwiązaniami są funkcje wielu zmiennych. Naturalne więzy o geometrycznym lub fizycznym charakterze powodują, że są to równania nieliniowe, szczególnie trudne w badaniu. Znaczna część dwudziestowiecznego postępu w teorii równań różniczkowych z pogranicza fizyki i geometrii wiąże się m.in. z budową słynnej teorii dystrybucji oraz pracami bardzo wielu matematyków. Mimo wielkiego wkładu ich osiągnięć, ta dziedzina wciąż zawiera liczne problemy otwarte (tzn. pytania bez odpowiedzi).

Niniejszy projekt ma charakter czysto teoretyczny i poznawczy, choć – w odległym planie – motywowany jest istotnością rachunku wariacyjnego i teorii równań różniczkowych, powodowaną (także) zastosowaniami matematyki w opisie optymalnej formy i optymalnych kształtów, a więc m.in. w fizyce i technice. Zamiarem autora jest m.in. badanie stabilności oraz niestabilności – ze względu na zmiany warunków brzegowych – zbiorów osobliwych rozwiązań równań pojawiających się np. w modelu Ericksena ciekłych kryształów oraz równań pokrewnych, a także praca nad budową nowych metod matematycznych, stosowanych w takich zagadnieniach. Badania będą prowadzone przy współpracy doktorantów i magistrantów z Uniwersytetu Warszawskiego.

---

<sup>1</sup>Frei Otto, 1925–2015, zasłynął nowatorskimi konstrukcjami lekkimi