

Algebry flagowe dla grafów zorientowanych

Graf zorientowany to zbiór wierzchołków wraz ze zorientowanymi krawędziami pomiędzy niektórymi z nich. Teoria grafów zorientowanych ogromnie rozwinęła się w ciągu ostatnich dziesięcioleci. Istnieje bardzo obszerna literatura na ten temat, a wiele prac zawiera nie tylko interesujące wyniki teoretyczne, ale także ważne algorytmy, jak również praktyczne zastosowania.

Centralnym problemem w tej teorii jest hipoteza Caccetty-Häggkvista, która mówi, że jeśli z każdego wierzchołka istnieją krawędzie do co najmniej $1/l$ części wierzchołków, to w tym grafie istnieje skierowany cykl o długości co najwyżej l . Problem ten był wielokrotnie rozważany przez wielu badaczy w ciągu ostatnich 40 lat, ale wciąż pozostaje otwarty. Wielkie znaczenie hipotezy Caccetty-Häggkvista można zauważyć m.in. w tym, że w 2006 roku zorganizowano specjalny warsztat dotyczący tylko tej hipotezy. W ramach niniejszego projektu badawczego planuje się rozwiązać pewne otwarte problemy ściśle powiązane z hipotezą Caccetty-Häggkvista, których rozwiązanie może pomóc w jej udowodnieniu.

Pierwszym celem projektu jest udowodnienie hipotezy Kelly-Kühn-Osthus, która, w najciekawszym otwartym przypadku, mówi, że jeżeli dla każdego wierzchołka grafu zorientowanego istnieją krawędzie do i z więcej niż ćwierci wierzchołków, to ten graf zawiera cykl skierowany długości 6. Dalsze cele badawcze obejmują rozwiązanie tej hipotezy bez założenia o krawędziach wchodzących z ponad ćwierci wierzchołków (zachowując jedynie założenie o krawędziach wychodzących do ponad ćwierci), oraz udowodnienie jej uogólnienia dla większych cykli skierowanych i innych orientacji cykli. Rozwiązanie tych problemów może dostarczyć nowych narzędzi wymuszania cyklu skierowanego w grafie, co może się okazać bardzo przydatne dla udowodnienia hipotezy Caccetty-Häggkvista.

Innym celem projektu jest znalezienie maksymalnej możliwej liczby występień cyklu skierowanego długości 4 (bez żadnych cięciw) w grafach zorientowanych ustalonej wielkości. Przypuszczalna konstrukcja ekstremalna dla tego problemu jest również przypuszczalną konstrukcją ekstremalną dla pierwszego i najczęściej rozważanego otwartego przypadku hipotezy Caccetty-Häggkvista, a więc rozwinięcie technik pozwalających udowodnić ten problem może być bardzo pomocne w dowodzie hipotezy.

Osiągnięcie wszystkich powyższych celów badawczych planowane jest dzięki użyciu nowoczesnych metod algebr flagowych, które redukują problem teorii grafów do programowania półodatnio-określonego, które może być rozwiązane numerycznie przy użyciu komputera. Metody algebr flagowych zostały wprowadzone dopiero kilka lat temu, a już mają znaczący wpływ na teorię grafów. Stosując je rozwiązano wiele istotnych problemów, często otwartych przez kilka dekad. To pokazuje również, dlaczego tak ważne jest nauczenie się więcej o możliwościach i ograniczeniach tych metod, a także ich dalszy rozwój.