Problemy i rozwiązania

Wiele problemów w informatyce pyta o przydział wartości pewnym obiektom w taki sposób, by spełnić daną listę więzów. Przykładowo, jak przydzielić lekcje do przedziałów czasowych tak, by lekcje jednego nauczyciela nie kolidowały w czasie; albo jak przydzielić zadania komputerom, aby żaden nie dostał dwóch zadań wymagających tych samych zasobów.

Takie problemy badane są abstrakcyjnie jako *kolorowania grafów*: mamy dane *wierzchołki* (lekcje czy zadania) i *krawędzie* między nimi (różnego rodzaju konflikty). Jak przydzielić wierzchołkom *kolory* (przedziały czasowe czy komputery) tak, by spełnić wszystkie więzy – przykładowo możemy wymagać by każda krawędź miała końce różnych kolorów.

Przestrzenie rozwiązań

Problemy takie jak wyżej mają często wiele rozwiązań, może istnieć wiele poprawnych kolorowań. Niektóre można uznać za bliższe innym, gdy różnią się tylko na kilku wierzchołkach. Możemy więc badać zbiór rozwiązań jako przestrzeń – pytając na przykład o drogi między rozwiązaniami. Co jeśli, przykładowo, znamy jedno obecne rozwiązanie, ale chcemy osiągnąć inne małymi krokami, zmieniając tylko po jednym kolorze na raz? Nie możemy sobie pozwolić na zapomnienie więzów, więc może się to okazać niemożliwe, nawet jeśli znamy oba rozwiązania!

Algorytmy i topologia

Dla niektórych rodzajów więzów znamy algorytmy, które robią dokładnie to – znajdują drogi między rozwiązaniami – i to optymalnie. Co zaskakujące, mimo że pytamy o skończone, dyskretne zbiory ze skończonymi więzami, algorytmy te działają myśląc o tym dużo luźniej. To jest, możemy wyobrazić sobie graf jako zestaw rozciągliwych sznurków zamiast krawędzi. Więzy stają się przeszkodami, np. rurami – wszelkie naciąganie i zginanie sznurków jest dozwolone, nie pozwalamy tylko przekraczać ścian rur.

Może się wydawać, że praktycznie wszystko można z takimi sznurkami zrobić, ale jednak nigdy nie oddzielimy zamkniętej pętli z sznurka od rury, wzdłuż której ją nawinięto, ani nie spowodujemy, by nawinięcie było dwukrotne. Topologia bada podobne warunki i ich uogólnienia w wyższych wymiarach. Okazuje się, że dokładnie te warunki ograniczają też możliwe drogi w przestrzeniach rozwiązań.

Nasz projekt badawczy

Celem proponowanego projektu jest lepsze zrozumienie tego jak topologiczne ograniczenia wpływają na nasze początkowe problemy. Ogólniej, chcielibyśmy zająć się topologią przestrzeni rozwiązań i zastosować jej opis do dowodzenia przydatnych twierdzeń o istnieniu szczególnych rozwiązań, lub do przedstawienia nowych algorytmów do rozwiązywania naszych problemów.

Używamy informatyki do sformalizowania niektórych pytań; w szczególności chcemy odpowiedzieć, dla jakich rodzajów problemów i więzów można stworzyć algorytm dla znajdowania dróg między rozwiązaniami. Taki algorytm można bezpośrednio zastosować, gdyby interesowały nas właśnie takie drogi, ale wgląd w przestrzeń rozwiązań może też po prostu pozwolić na znajdywanie lepszych. Istotnie, wiele algorytmów używanych w praktyce do rozwiązywania systemów więzów opiera się na przeszukiwaniu lokalnym, czyli na pomyśle poprawiania rozwiązania małymi krokami.

Zadajemy jednak wiele bardziej matematycznych pytań, w większości związanych ze starą prostą hipotezą postawioną w 1966 r. przez Stephena Hedetniemi'ego. Mówi ona, że iloczyn dwóch grafów (możemy o nim myśleć jako o koniunkcji dwóch systemów więzów) można pokolorować tak prosto, na ile pozwala prostszy z dwu czynników. To zaskakujące pytanie ma wiele głębokich powiązań z różnymi teoriami matematycznymi. O ile mamy małe szanse na nie odpowiedzieć, myślimy iż nasze narzędzia mogą dokonać pewnego postępu. Powiększyłoby to nasze zrozumienie fascynujących współoddziaływań kombinatoryki i topologii, dając nieprzewidywalne zastosowania jako skutek uboczny.