

Fundamentalnym równaniem opisującym nierelatywistyczną materię w skali mikroskopowej jest wielociałowe równanie Schrödingera. To *liniowe* równanie opisuje nie tylko molekuly czy atomy lecz również układy składające się ze znacznie większej liczby cząsteczek, takie jak np. gazy bozonów. Te ostatnie, używane w eksperymentach, składać się mogą nawet z tysięcy cząsteczek. W takiej sytuacji rozwiązanie równania Schrödingera jest niemożliwe: zarówno z punktu widzenia rozwiązań ścisłych jak i numerycznych. Do opisu badanych układów używa się wtedy teorii efektywnych, które posiadają znacznie mniejszą liczbę stopni swobody, ale często są *nieliniowe*. Celem niniejszego projektu badawczego jest matematyczne uzasadnienie pewnych efektywnych teorii używanych w mechanice kwantowej wielu ciał.

Pierwsze z zadań tego projektu dotyczy analizy dużych układów oddziałujących bozonów. Jedną z najbardziej charakterystycznych cech układów bozonów jest ich zdolności do kondensacji. Zjawisko kondensacji Bosego–Einsteina - bo o nim mowa - polega na tym, że w dostatecznie niskiej temperaturze większość cząsteczek znajduje się w tym samym stanie kwantowym. Zjawisko to zostało przewidziane przez Bosego i Einsteina w 1924 roku, zaś eksperymentalną realizację tego nowego stanu skupienia materii osiągnięto w 1995 roku, za co zresztą Cornell, Ketterle i Wieman dostali w 2001 roku nagrodę Nobla. Od tego czasu, udowodnienie istnienia kondensacji Bosego–Einsteina w układach oddziałujących (Bose i Einstein przewidzieli to zjawisko w wyidealizowanym modelu nieoddziałujących bozonów), wychodząc od mikroskopowych praw mechaniki kwantowej, stało się jednym z podstawowych problemów fizyki matematycznej. Heurystycznie, gdy oddziaływanie między cząsteczkami jest słabe, sensownym jest założyć, że cząsteczki są niezależne, ale za to w pewnym uśrednionym, samouzgodnionym zewnętrznym potencjale. Takie założenie prowadzi do teorii Hartree’go/Grossa–Pitaevskiego, która przewiduje własności układu oddziałujących bozonów w pierwszym przybliżeniu. Nas interesować będzie dokładniejsze zrozumienie układu oddziałujących bozonów. Heurystycznie odpowiedź na to pytanie dana jest przez teorię Bogoliubowa, wedle której cząsteczki nie są już (prawie) niezależne i uwzględnić należy korelacje między nimi. Celem pierwszej części tego projektu będzie matematyczne uzasadnienie poprawności przybliżenia Bogoliubowa, zarówno pod względem własności energetycznych układu bozonów jak i ich dynamiki.

Celem drugiej części projektu będzie uzasadnienie innej efektywnej teorii, tak zwanego przybliżenia fal spinowych, w kontekście kwantowego modelu Heisenberga. Model Heisenberga jest jednym z najważniejszych modeli fizyki statystycznej. Używany jest do przewidywania magnetycznych właściwości materiałów. Przybliżenie fal spinowych przewiduje, że w niskich temperaturach własności modelu Heisenberga opisać można za pomocą nieoddziałujących ze sobą kwazicząstek zwanych magnonami lub falami spinowymi. Hipotezę tę będziemy się starali udowodnić badając energetyczne i dynamiczne własności kwantowego modelu Heisenberga.