Streszczenie projektu: **Nieprzemienna probabilistyka z zastosowaniami.**

Głównym celem naukowym projektu jest konstruowanie i badanie nowych uogólnionych nieprzemiennych procesów stochastycznych, w szczególności *uogólnionych ruchów Browna*, związanych ze zdeformowanymi relacjami komutacji, ich związków z klasyczną probabilistyką oraz badanie związanych z nimi algebr von Neumanna.

Procesy stochastyczne w klasycznej probabilistyce opisują różnorodne zjawiska, w których występuje element losowości, i oparte są na pojęciu (klasycznej) niezależności przemiennych zmiennych losowych. W nieprzemiennej probabilistyce zmienne losowe nie komutują, ponieważ są to operatory samosprzężone na przestrzeniach Hilberta (np. macierze). Ponadto w nieprzemiennej probabilistyce występują inne pojęcia niezależności, takie jak niezależność wolna, monotonicza, boole'owska, warunkowo wolna czy bm-niezależność. Inne jest także pojęcie rozkładu zmiennej losowej i wartości oczekiwanej. Ogólnie nieprzemienna przestrzeń probabilistyczna to $*$-algebra $\mathcal{A}$ z jednością oraz ze stanem φ, który pełni rolę klasycznej wartości oczekiwanej. Rozkładem nieprzemiennej zmiennej losowej $A = A^* \in \mathcal{A}$ jest miara probabilistyczna μ_A na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$, dla której funkcja $\mathbb{C}^+ \ni z \mapsto \varphi((z-A)^{-1}) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(dx)}{z-x} := G_\mu(z)$ jest transformatą Cauchy'ego tej miary. W szczególności transformata Cauchy'ego w nieprzemiennej probabilistyce pełni rolę podobną do transformaty Fouriera w probabilistyce klasycznej i jest głównym narzędziem analitycznym badań. Definiując nieprzemienne procesy stochastyczne (gaussowskie, Poissona, Wienera czy Lévy'ego) uogólnia się abstrakcyjne własności procesów klasycznych. Na przykład, miara *gaussowska* to miara otrzymana w centralnym twierdzeniu granicznym dla danego pojęcia niezależności – dla niezależności wolnej jest to miara Wignera, a dla monotonicznej jest to arcus sinus. Operatory gaussowskie są konstruowane jako suma operatora kreacji i anihilacji przez ustalony wektor (na odpowiednio zdeformowanej przestrzeni Focka), a ich rozkłady są miarami gaussowskimi. Ruch Browna otrzymuje się jako sumę kreacji i anihilacji przez funkcje postaci $\chi_{[0,t]}$ dla $t > 0$. Inne nieprzemienne procesy stochastyczne określa się podobnie, dodając odpowiednie modyfikacje (np. związane z operatorem ilości cząstek). Ogólnie nieprzemienne procesy Lévy'ego są to procesy stacjonarne o przyrostach niezależnych (w sensie danej niezależności nieprzemiennej). Wszystkie one składają się z operatorów samosprzężonych, można więc rozpatrywać algebry przez nie generowane, w szczególności ich bikomutanty czyli algebry von Neumanna.

W jaki sposób konstruować zdeformowane przestrzenie Focka, na których działają operatory kreacji i anihilacji? Idea jest następująca. Jeśli mamy dany operator kontrakcji T na $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, to można go rozszerzyć na $\mathcal{H}^{\otimes n}$ wzorem $T_k := I^{\otimes(k-1)} \otimes T \otimes I^{\otimes(n-k-1)}$ dla dowolnego $1 \le k \le n-1$. Jeśli T spełnia warunek Hecke: $T^2 = (q^2-1)T + q^2 I$ dla pewnego $0 \le g \le 1$ oraz warunki Yanga-Baxtera $T_k T_{k+1} T_k = T_{k+1} T_k T_{k+1}$ dla $k \in \mathbb{N}$ i $T_k T_j = T_j T_k$ jeśli $|k-j| \ge 2$, to przy jego pomocy można zdefiniować zdeformowane operatory symetryzacji P_n^T na wolnej przestrzeni Focka. Te operatory pozwalają zdefiniować nową strukturę (iloczyn skalarny) zdeformowanej przestrzeni Focka oraz odpowiednie (T-zdeformowane) opertory kreacji $a_T^+(f)$ i anihilacji $a_T(f)$ przez wektory $f \in \mathcal{H}$. Relacje komutacji dla tych operatorów są zdeformowanymi kanonicznymi relacjami komutacji. Operatory $g_T(f) = a_T^+(f) + a_T(f)$ są gaussowskie, a jeśli $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ to dla $t > 0$ operatory $g_T(f_t)$, gdzie $f_t := \chi_{[0,t]}$ jest funkcja charakterystyczną (indykatorem) przedziału $[0,t]$, definiują ruch Browna. Takie konstrukcje i badanie ich własności są głównym tematem projektu.

Ponadto w Projekcie chcemy badać deformacje operatorów $A \mapsto W(A)$ takie aby rozkład $W(A)$ był znaną transformatą rozkładu A, taką jak t-transformata czy U-transformata. Dla takich deformacji zbadamy ich wpływ na zachowanie się spektrów operatorów (wartości własnych macierzy). Będziemy także badać modele mieszanych niezależności w nieprzemiennej probabilistyce (boolowsko-monotonicznej, boolowsko-wolnej, klasyczno-wolnej), odpowiednie twierdzenia graniczne (centralne czy Poissona) i związane z nimi kombinatoryczne własności partycji oraz geometryczne własności stożków dodatnich związanych z tymi niezależnościami, a także odpowiadające im nieprzemienne procesy stochastyczne (gaussowskie czy ogólniej Lévy'ego).

Tematyka badawcza podejmowana w projekcie należy do głównych światowych nurtów badań w nieprzemiennej probabilistyce, w szczególności niezwykle ważne będą konstrukcje różnych modeli nieprzemiennych procesów stochastycznych i badania algebr von Neumanna związanych z tymi procesami. Powinny dostarczyć nowych przykładów faktorów typu III, jak również mogą mieć związek ze słynnym problemem Kadisona izomorfizmu faktorów grup wolnych dla różnej liczby wolnych generatorów, a także pokazać nowe zjawiska i dać nowe impulsy do badań deformacji operatorowych oraz nowych modeli nieprzemiennych niezależności.