

Badanie asymptotyki ogonów rozwiązań losowych równań afinicznych

Niniejszy projekt poświęcony jest badaniu asymptotyki ogonów rozwiązań losowych równań afinicznych. Są to równania stochastyczne postaci $R \stackrel{d}{=} MR + Q$ (równość według rozkładu), gdzie R i (M, Q) są niezależne po prawej strony tej równości. Takie równania w naturalny sposób pojawiają się w wielu dziedzinach matematyki stosowanej, np. w ekonomii, fizyce, biologii czy socjologii. Rozwiązanie R takiego równania nazywamy perpetuitą i jest ona głównym obiektem zainteresowań w tej dziedzinie. Perpetuita podlega losowości, przy czym wpływ na tę losowość mają rozkłady zmiennych losowych M i Q oraz interakcja pomiędzy nimi.

Perpetuity można interpretować w następujący sposób: jeśli Q stanowi losową wartość zapłaty, a M losowy współczynnik dyskonta, to R reprezentuje wartość bieżącą nieskończonej renty płaconej Q co roku. Ze względu na tę prostą i bardzo naturalną postać, perpetuity cieszą się zasłużonym zainteresowaniem w matematyce stosowanej. Znalazły zastosowanie w badaniu jasności Drogi Mlecznej, modelowaniu zanieczyszczeń, inwestycji finansowych, radioaktywności, spacerów losowych czy nawet modelach rozprzestrzeniania się dziedzictwa kulturowego. Należy podkreślić, że intensywne badania nad własnościami perpetuit nie wynikają tylko z ich naturalnych zastosowań, ale również z faktu, że odpowiedzi na wiele wydawałoby się prostych pytań w tej dziedzinie wymaga zastosowania zaawansowanej matematyki.

Jednym z takich problemów jest znalezienie pełnego rozkładu zmiennej losowej R dla zadanych M i Q . Okazuje się, że jest ono możliwe tylko w nielicznych przypadkach, co jest pewną niedogodnością w stosowaniu tej teorii. W zastosowaniach bardzo często jednak nie jest konieczna znajomość pełnego rozkładu perpetuity, a wystarcza wiedza o prawdopodobieństwie, że R będzie bardzo duże (lub bardzo małe). W szczególności, jeśli R interpretujemy jako wartość nieskończonej losowej renty, ważne jest z jakim prawdopodobieństwem wartość bieżąca tej renty R przekroczy ustalony próg x , czyli $\mathbb{P}(R > x)$. W odpowiedzi na pytania tego typu pomagają przedmiot podstawowych badań dziedziny losowych równań afinicznych, czyli badanie asymptotyki ogonów. Twierdzenia jakimi będziemy się zajmować w projekcie można rozumieć następująco: dla zadanych M i Q szukana jest funkcja f , o której wiadomo tyle, że dla dużych x , (nieznana) wartość $\mathbb{P}(R > x)$ jest bliska (znanej) wartości $f(x)$. Znalezienie asymptotyki ogona perpetuity jest równoważne znalezieniu takiej funkcji f .

W literaturze jest znanych wiele wyników dotyczących asymptotyki ogonów, kiedy M i Q spełniają pewne warunki. Asymptotyka ta nie jest jednak znana w przeciwnym przypadku. Celem niniejszego projektu jest możliwie kompletny opis asymptotyki ogonów R dla dowolnych M i Q .