Problemy separacji grafów z perspektywy złożoności parametryzowanej

1 Koncepcja projektu i cele

Jeżeli P $\neq$ NP, nie istnieją szybkie algorytmy dla problemów NP-trudnych. *Złożoność parametryzowana* jest konceptem próbowania radzenia sobie z tymi problemami przez analizowanie różnych miar trudności (w przeciwieństwie do rozmiaru wejścia), i konstruowanie szybkich algorytmów, gdy ustalona miara jest relatywnie mała. Powiemy, że problem jest FPT (ang. *fixed parameter tractable*), jeśli istnieje dla niego algorytm o złożoności czasowej $f(k) \cdot |x|^{\mathcal{O}(1)}$, gdzie x jest instancją, k jest liczbą naturalną określającą miarę trudności, tzw. *parametrem*, i f jest pewną obliczalną funkcją.

Teoria przepływów i cięć grafów jest jedną z najszerzej badanych dziedzin w optymalizacji kombinatorycznej. Klasycznym książkowym przykładem jest problem *minimalnego cięcia*, w kórym dla danego grafu G, szukamy zbioru krawędzi o najmniejszej liczbności, którego usunięcie rozspójnia G. Podczas gdy minimalne cięcie posiada wielomianowe algorytmy, często nawet jego mała modyfikacja staje się NP-trudna, np. gdy szukamy minimalnego cięcia, którego usunięcie spowoduje rozpadnięcie grafu G na dwie równe części, tzw. *minimalna bisekcja*.

Głównym celem projektu jest poszukiwanie szybkich algorytmów FPT dla NP-trudnych problemów separacji grafów, a także, dowodzenie, że niektóre ograniczenia górne nie jesteśmy w stanie poprawić. Projekt jest podzielony na trzy części:

Celem pierwszej części, jest poprawa algorytmów dla dwóch klasycznych problemów, tj. *Node Multiway Cut* i minimalnej bisekcji. W obydwu problemach parametrem jest wielkość rozwiązania.

Zazwyczaj wierzchołkowe wersje problemów cięciowych okazują się trudniejsze. W problemie Node Multiway Cut, dla danego grafu G, zbioru wierzchołków terminalnych T, i parametru k, szukamy co najwyżej k nie terminalnych wierzchołków S, których usunięcie z G rozspójnia T, tj. nie ma ścieżki pomiędzy żadnymi $t_1, t_2 \in T$ w $G - S$. Najszybszy znany algorytm dla tego problemu ma złożoność czasową 2^k [1] (by Cygan i in.), podczas gdy jego wierzchołkowa wersja Edge Multiway Cut posiada algorytm o czasie działania 1.84^k (by Cao i in.). Chcielibyśmy zbadać czy także dla niego możliwe jest przekroczenie stałej 2 w złożoności czasowej.

Cygan i in. [STOC 2014], udowodnili, że minimalna bisekcja jest FPT, i zaprezentowali algorytm o złożoności czasowej $2^{\mathcal{O}(k^3)}$. By go otrzymać, zaproponowali konstrukcję specjalnego rodzaju *dekompozycji drzewiastej*, w której w *worki* mają silnie spójną strukturę, ale mogą mieć dowolne rozmiary. Spróbujemy skonstruować szybszy algorytm konstrukcji dekompozycji, który może doporowadzić do algorytmu dla minimalnej bisekcji.

W drugiej części, rozważymy tzw. *fenomen pierwiastowy* w podwykładniczych algorytmach. Bazowymi problemami, o złożoności $2^{\mathcal{O}(\sqrt{k})}$ są problemy w grafach planarnych. Istnieje jedynie kilka innych, które mają podobne zachowanie. W szczególności, są to problemy kompletności, tj. *Chordal Completion*, *(Proper) Interval Completion*, *Trivially Perfect Completion*. Zrozumienie czy pierwiastkowy wykładnik jest optymalny, jest w nich znacznie trudniejsze niż w przypadku grafów planarnych.

W pracy Bliznets et al. [SODA 2016], udowodniliśmy, że przy założeniu ETH (ang. *Exponential Time Hypothesis*), problemy te nie posiadają algorytmów o złożoności $2^{o(\sqrt[4]{k})}$. Dodatkowo, zaproponowaliśmy hipotezę, która implikuje dokładne ograniczenia. Zakłada ona trudność stałej aproksymacji problemu minimalnej bisekcji w podwykładniczym czasie. Będziemy rozwijać ten projekt dalej, i spróbujemy ją połączyć z hipotezą Feige, o trudności problemu 3-SAT w przypadku średnim.

Celem ostatniej części, jest poprawienie algorytmów dla problemów cięć w klasycznym sensie dokładnych algorytmów, tj. z miarą trudności będącą liczbą wierzchołków grafu.

Rozważymy dwa problemy mające długą literaturę algorytmów FPT, i dla których poprawienie naiwnego algorytmu $2^{|V|}$ nie jest takie proste. Są to *Multicut* i *Directed Feedback Arc Set*. Chcemy także zająć się minimalną bisekcją. Zaskakująco, nie była ona jeszcze badana w tym kontekście.

2 Powody podjęcia tematyki badawczej

Rozwiązanie zadań projektu wpływa bezpośrednio na rózwój nauki. Naukowcy od dawna próbują poradzić sobie z NP-trudnymi problemami, możliwość skonstruowania dla nich szybszych algorytów ma zarówno teoretyczne, jak i praktyczne zastosowanie.

[1] Do oznaczenia czasowej złożoności obliczeniowej używamy notacji która pomija wielomianowe składniki.