POPULARNONAUKOWE STRESZCZENIE PROJEKTU

Celem projektu jest prowadzenie badań w topologii stosowanej, które są zarówno kontynuacją badań poprzednio prowadzonych, jak i zawierają całkowicie nowe kierunki. Dokładniej planuje się w nich cztery podstawowe części, w nakładzie czasowym odpowiadającym podanej kolejności.

Pierwsza grupa to zagadnienia związane z twierdzeniem Bourgina–Yanga (dla różnych grup symetrii), czyli bardziej wysublimowanej wersji twierdzenia Borsuka–Ulama. To drugie (w wersji klasycznej) mówi, że nie ma ciągłego odwzorowania sfer $f\colon S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^m)$ spełniającego $f(-x) = -f(x)$ o ile $n > m$. Natomiast twierdzenie Bourgina–Yanga (również w klasycznej wersji) stwierdza, że jeśli $f\colon S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ jest odwzorowaniem spełniającym $f(-x) = -f(x)$, to $\dim f^{-1}(0) \geq n - m - 1$. W szczególności, jeśli $n > m$ to wymiar tego zbioru jest ≥ 0, a więc jest to zbiór niepusty, a stąd otrzymujemy tezę tw. Borsuka–Ulama.

Twierdzenie Borsuka–Ulama ma wiele zastosowań będąc podstawowym narzędziem do dowodów twierdzeń o równym podziale, zarówno w wersji dyskretnej (problem "naszyjnika", czyli podziału rozpiętego naszyjnika na części o tej samej liczbie koralików danego rodzaju przy pomocy możliwie najmniejszej liczby cięć), czy też ciągłej (problem "kanapki", podziału kanapki składającej się z bułki, szynki i sera na części o równej wadze). O ile twierdzenie Borsuka–Ulama zapewnia istnienie takiego podziału, to twierdzenia typu Bourgina–Yanga dają informację, że zbiór możliwych podziałów jest zbiorem coraz to większego wymiaru w zależności od różnicy $n - m - 1$. Np. jeśli kanapka w $\mathbb{R}^3$ ma dwa składniki, to zbiór ten ma wymiar jeden. Oczywiście jeśli dopuścić bardziej skomplikowane grupy symetrii niż $\mathbb{Z}_2 = \{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\}$, a dziedzina i przeciwdziedzina funkcji f są bardziej złożone, to sytuacja matematycznie się bardzo komplikuje, zarówno dla zagadnienia Borsuka–Ulama jak i Bourgina–Yanga, a jednak wiele sytuacji kombinatorycznych wymaga takiej ogólności. Szeroka dyskusja zarówno ogólności jak i zastosowań twierdzenia Bourgina–Yanga, w tym zakresu stosowania twierdzenia Borsuka–Ulama (warunki na G, dziedzinę i przeciwdziedzinę funkcji f) będzie celem pierwszej części projektu. Ma ona również zastosowania poza matematyką, np. w teorii gier — równowagi rynkowej.

Druga grupa tematyczna, to badanie złożoności topologicznej przestrzeni X o skończonej liczbie symetrii. Teoria złożoności topologicznej, zdefiniowana na początku obecnego stulecia, jest jednym z najprężniej rozwijających się działów topologii stosowanej. Heurystycznie rzecz ujmując, jeśli przestrzeń wszystkich możliwych położeń układu mechanicznego (robota) określa się za pomocą przestrzeni X o złożności topologicznej równej n, to takiemu robotowi należy wydać co najmniej n instrukcji, aby mógł przemieszczać się autonomicznie (bez kontroli człowieka) bez groźby zawieszenia jego systemu operacyjnego. Okazuje się, że tę liczbę można określić bardzo precyzyjnie w języku teorii homotopii, zliczając ciągłe częściowe cięcia rozwłóknienia dróg $PX \to X \times X$. W przypadku gdy X ma skończoną grupę symetrii (precyzyjnie: na X działa grupa skończona), można różnie definiować "złożoność topologiczną z symetrią", w zależności od tego jak interpretujemy model robota topologicznego. Prowadzi to do różnych definicji (w tej chwili znamy już cztery, z których dwie zostały wprowadzone w pracach wykonawców). Badanie tych pojęć, porównanie ich własności, związków z teorią działań, a być może określenie jeszcze innej definicji jest drugim celem naszego projektu. Bardziej szczegółowym jest podanie definicji i konstrukcji grafu Reeba gładkiej funkcji niezmienniczej na rozmaitości z działaniem skończonej grupy G.

Trzecia grupa tematyczna zakłada określenie oraz badanie tego co roboczo nazywamy "linearyzacją" homomorfizmu ϕ grup i, kolejno, spektrum tego odwzorowania liniowego. Taka konstrukcja znana jest dla homomorfizmów beztorsyjnych grup nilpotentnych i ich skończonych rozszerzeń — jako linearyzację otrzymujemy macierz całkowitoliczbową skończonego rozmiaru. Wydaje się, że analogiczne pojęcie można zdefiniować dla znacznie szerszej klasy grup zwanych rezidualnie nilpotentnymi, w efekcie uzyskując nieskończony produkt macierzy skończonych rozmiarów. Choć w tym wypadku nie widać bezporednio interpretacji topologicznych tego pojęcia jak w przypadku grup nilpotentnych, to może powstać niezmiennik w geometrycznej teorii grup przyporządkowujący homomorfizmowi (czyli obiektowi skomplikowanemu) obiekt prostszy (macierz całkowitoliczbową). Badanie własności tego niezmiennika, choć w tej chwili o mało precyzyjnie określonej metodologii, wydaje się być warte podjęcia trudu.

Ostatni cel to badanie podprzestrzeni przestrzeni funkcyjnych, które można zdefiniować dzięki działaniu grupy $O(N)$ w dziedzinie funkcji, a których elementy mają określone własności geometryczne, np. zmieniają znak i mają zbiór zer zawierający sumę hiperpłaszczyzn. W związku z tym rozwiązania problemów wariacyjnych z $O(N)$-symetrią znalezione w tych podprzestrzeniach mają też te własności. Opis konstrukcji i ilości (w zależności od N) wzajemnie prostopadłych przestrzeni tego typu daje automatycznie informacje o ilości rozłącznych serii rozwiązań o wspomnianych własnościach.