

Analiza uporządkowanych losowych obserwacji odgrywa ważną rolę w statystyce i probabilistyce stosowanej. Próbkowe ekstrema w naturalny sposób określają zakres losowego zjawiska, a mediana ocenia centralne obserwacje lepiej niż średnia. Statystyki pozycyjne i ich liniowe kombinacje stanowią prostą i użyteczną rodzinę funkcji obserwacji szeroko stosowaną we wnioskowaniu statystycznym. Jeśli obserwujemy losowe zjawiska w ograniczonym czasie, możemy zanotować jedynie pewną frakcję zjawisk i poznamy tylko wybrane statystyki pozycyjne. W praktyce używa się różnych modeli redukcji zakresu eksperymentu. Jednym z obiektów naszych badań będzie schemat progresywnego cenzurowania typu II: po każdej awarii, wraz z uszkodzonym obiektem możemy usunąć z eksperymentu pewną wstępnie ustaloną liczbę losowo wybranych obiektów wciąż działających. Statystyki pozycyjne pełnią również kluczową rolę w badaniu czasów działania systemów technicznych złożonych z jednakowych elementów. Rozkład czasu działania systemu jest mieszanką rozkładów statystyk pozycyjnych opartych na czasach pracy elementów, a współczynniki mieszanki zależą tylko od struktury systemu. Innym popularnym typem uporządkowanych losowych danych są rekordy, mające wielkie znaczenie w analizie i prognozowaniu katastrof, klęsk żywiołowych i innych zjawisk ekstremalnych. Rekordy pojawiają się bardzo rzadko i dlatego znacznie częściej zdarzające się ich uogólnienia, k -te ekstremalne wartości zwane k -tymi rekordami, są też wykorzystywane w statystycznych analizach.

Mimo że statystyki pozycyjne i rekordy mają sporo podobnych własności, długo były badane niezależnie. Dopiero Kamps (1995) przedstawił udaną propozycję modelu obejmującego oba te obiekty, a także wiele bardziej złożonych struktur. Zdefiniował on uogólnione statystyki pozycyjne o wielowymiarowych rozkładach łącznych określonych z użyciem pojedynczej dystrybuanty i układu dodatnich parametrów. Odpowiednio dobierając parametry, możemy otrzymać rozkłady statystyk pozycyjnych i rekordowych, a także obserwacje progresywnego cenzurowania. Model ten jest też na tyle elastyczny, że opisuje statystyki pozycyjne i rekordy w realistycznych sytuacjach, gdy awarie kolejnych obiektów powodują zwiększenie obciążenia pozostałych i wpływają niekorzystnie na ich dalsze działanie. W naszych badaniach skupiamy się na uogólnionych statystykach pozycyjnych. Podstawowym zadaniem jest zdobycie pogłębionej wiedzy o ich rozkładach przy możliwie najłagodniejszych założeniach o ich parametrach. Aktualnie sporo wiadomo o tzw. m -uogólnionych statystykach pozycyjnych opisywanych zaledwie dwoma parametrami. Praca nad tym zagadnieniem w ogólnym przypadku jest dużo trudniejsza i wymaga wykorzystania różnorodnych narzędzi z odległych gałęzi matematyki, m.in. teorii funkcji specjalnych czy analizy zespolonej. Zwrócimy szczególną uwagę na ważne ze względów praktycznych rozkłady dyskretne. Pojawiają się one, gdy wytrzymałość badanych obiektów mierzy się ilością jego krótkotrwałych wielokrotnych użyci do momentu zepsucia, a nie czasem działania przy pojedynczym długotrwałym użyciu, a także, gdy kontrola przebiegu zdarzeń losowych w eksperymencie możliwa jest tylko w wybranych momentach. Analiza uporządkowanych danych pochodzących z dyskretnych rozkładów wymaga bardziej wyrafinowanych metod i uważniejszego podejścia niż przypadek ciągły. Dla bardzo dużych zbiorów uporządkowanych danych dokładne wyznaczenie odpowiednich rozkładów staje się technicznie niewykonalne i trzeba się uciekać do asymptotycznych aproksymacji. Rozważymy asymptotyczne rozkłady funkcji statystyk porządkowych przy założeniach słabszych niż klasyczne: dopuszczamy obserwacje mające różne rozkłady, albo przyjmujemy słabszy odpowiednik niezależności, np. stacjonarność czy pewne modele słabej zależności.

Kolejnym tematem projektu jest scharakteryzowanie rozkładów w oparciu o dane uporządkowane. Problemy charakteryzacji polegają na pokazaniu, że dana własność zmiennych losowych jednoznacznie opisuje wąską klasę rozkładów. Takie twierdzenia są stosowane w statystyce, np. w konstrukcji testów zgodności weryfikujących hipotezy, że losowe dane mają rozkład z wybranej klasy. Zbadamy m.in. charakteryzacje oparte na własnościach typu: jeśli średnia funkcji pewnej zmiennej pod warunkiem, że inna zmienna przyjmuje daną wartość, może być przedstawiona za pomocą danej relacji funkcyjnej, to jej rozkład należy do danej rodziny. Skupimy się też na wyznaczeniu optymalnych oszacowań momentów i kwantyli uporządkowanych zmiennych i ich funkcji dla różnych bogatych rodzin rozkładów populacji. Naszym celem jest wyznaczenie oszacowań średnich wartości uogólnionych statystyk pozycyjnych pochodzących z rodzin rozkładów o rosnącej gęstości lub intensywności awarii oraz oszacowanie wariancji liniowych funkcji statystyk pozycyjnych i rekordowych w jednostkach wariancji populacji. Planujemy też oszacować ich kwantyle w różnych jednostkach skali. Pewne nierówności dla liniowych kombinacji statystyk pozycyjnych można stosować do szacowania średniego czasu pracy systemów. Nie jest to możliwe np. w przypadku wariancji. Niedawno członkowie zespołu wskazali optymalne oszacowania wariancji czasów życia systemów, potem rozszerzyli je na bardzo ogólną klasę miar rozproszenia. Kolejnym krokiem jest otrzymanie podobnych oszacowań dla ogólnych miar położenia. Porównanie momentów czasów życia systemu i pojedynczego elementu było możliwe dzięki przedstawieniu ich rozkładów jako mieszanek. Obserwacja ta stała się zachętą do porównywania momentów ogólnych mieszanek uporządkowanych zmiennych losowych. Rezultaty uzyskane dzięki takiemu podejściu zostaną użyte w globalnej analizie modeli bayesowskich, regresyjnych i wybranych problemach matematyki ubezpieczeniowej.