

Ergodyczne i topologiczne własności układów dynamicznych z uogólnioną specyfikacją

Układ dynamiczny to matematyczny model zjawiska zmieniającego się w czasie. Jest to para (X, T) , gdzie X jest zwartą przestrzenią topologiczną a $T: X \rightarrow X$ ciągłym odwzorowaniem zadającym dynamikę w tym modelu. Miarę niezmienniczą μ nazywamy ergodyczną, jeśli każdy podukład danego układu ma μ -miarę równą 0 lub 1. Oznacza to, że dynamka układu jest nierozkładalna z punktu widzenia takiej miary. Entropia topologiczna jest miarą skomplikowania dynamiki układu. Entropia miarowa bada, jak złożone jest zachowanie odwzorowania względem danej miary. Zasada wariacyjna mówi, że entropia topologiczna odwzorowania to supremum z entropii miarowych miar ergodycznych. Jeśli część przestrzeni, na której dynamika jest ciekawa ma dużą μ -miarę, to entropia miarowa odwzorowania T jest bliska entropii topologicznej tego odwzorowania.

Rodzina miar niezmienniczych ma strukturę *sympleksu Choqueta* (czyli pewnego uogólnienia trójkąta na dowolny — być może nieskończony — wymiar). Punktami ekstremalnymi (czyli — w pewnym sensie — wierzchołkami) w takim sympleksie są miary ergodyczne. Czasami zdarza się, że miary te są gęste w sympleksie miar niezmienniczych. Jest to sprzeczne ze skończeniem wymiarową intuicją i wyznacza strukturę takiego sympleksu prawie jednoznacznie — jedynym nietrywialnym sympleksem o tej własności jest tak zwany sympleks Poulsena. Obiekt ten ma wiele innych, zaskakujących cech.

Orbitą punktu nazywamy ciąg wszystkich miejsc w przestrzeni, które zostaną przez niego odwiedzone w skończonym czasie. Wyobraźmy sobie, że dla dowolnej krotki punktów (x_1, \dots, x_n) , która spełnia pewne techniczne założenia, jesteśmy w stanie znaleźć punkt, który przez pewien czas zachowuje się podobnie jak x_1 , następnie „przełącza się” i zaczyna śledzić x_2 , itd., aż do x_n . Taka zdolność do klejenia kawałków orbit nosi nazwę *uogólnionej specyfikacji* i zwykle wystarcza, aby udowodnić, że sympleks miar niezmienniczych danego układu jest jednopunktowy lub jest sympleksem Poulsena.

Katok postawił następujące pytanie: *Co trzeba założyć o układzie dynamicznym, aby zasada wariacyjna była jedyną przeszkodą na istnienie miary ergodycznej o danej entropii?* Innymi słowy, chcemy znaleźć możliwie szeroką klasę modeli o tej własności, że dla każdej nieujemnej liczby rzeczywistej t mniejszej od entropii topologicznej będziemy w stanie wskazać miarę ergodyczną, której entropia miarowa wynosi t . Katok podejrzewa, że jest to prawda dla wszystkich układów gładkich. Prawdziwość tej hipotezy została wykazana dla pewnej klasy układów a w dowodzie wykorzystano uogólnioną specyfikację.

Własność *entropijnej gęstości* miar ergodycznych oznacza, że dla każdej miary niezmienniczej jesteśmy w stanie znaleźć ciąg miar ergodycznych, który przybliży tę miarę dowolnie dobrze i jednocześnie entropia tej miary jest aproksymowana przez entropie miar należących do tego ciągu. Pfister i Sullivan udowodnili, że jeśli układ ma pewną własność w typie specyfikacji (tzw. prawie specyfikację), to miary ergodyczne są entropijnie gęste. Jest to ściśle powiązane z problemem Katoka. Gęstość miar ergodycznych jest jedną z wielu ciekawych konsekwencji uogólnionej specyfikacji.

Realizując projekt chciałabym skupić się na następujących zagadnieniach:

1. Rozwijaniu teorii układów dynamicznych z własnościami w typie specyfikacji — poszukiwaniu nowych własności, które występują w układach gładkich i działaniach \mathbb{Z}^d oraz sprawdzaniu jakie mają konsekwencje dla dynamiki układu, który je posiada.
2. Poszukiwaniu nowych przykładów, które ilustrowałyby ograniczenia istniejącej teorii. Znamy wiele przykładów fenomenów, które zachodzą w dynamice symbolicznej, ale ciągle niewiele wiadomo o istnieniu gładkich modeli o podobnych własnościach (jest to tak zwany *problem gładkich realizacji*). Konstrukcja gładkiego i ściśle ergodycznego (czyli takiego, który dopuszcza istnienie dokładnie jednej miary ergodycznej) układu o dodatniej entropii pozwoliłaby na negatywne rozstrzygnięcie problemu Katoka.

Oprócz wyżej wymienionych zagadnień chciałabym się zająć również próbą odpowiedzi na inne problemy otwarte, ściśle powiązane z tematem projektu.