Jedną z najbardziej fundamentalnych zasad matematyki, pochodzącą już z kartezjuszowskiej *La Géométrie* z 1637 roku, jest równoważność między geometrią i algebrą. Obiekty geometryczne mogą być badane za pomocą narzędzi algebraicznych, a algebry mogą być analizowane przez myślenie o nich geometrycznie. Geometria nieprzemienna jest badaniem geometrii algebr, które są nieprzemienne. Daleka od prostego uogólnienia konwencjonalnej geometrii, geometria nieprzemienna jest faktycznie wymuszona na nas przez podstawowe zasady mechaniki kwantowej, które wymagają, by obserwowalne wielkości fizyczne odpowiadały nieprzemiennym operatorom na przestrzeni Hilberta. Istnieje kilka dziedzin geometrii nieprzemiennej, każda z własnymi metodami badawczymi. Jedną z takich podstawowych dziedzin jest teoria *homologii cyklicznych*, na której koncentruje się ten projekt.

Badanie przestrzeni i struktur na nich (jak wiązki wektorowe, czy metryki mierzące odległości) jest jednym z głównych celów współczesnej matematyki i fizyki matematycznej. Klasyfikacja tych struktur uzyskiwana jest zwykle przez obliczanie niezmienników: są one tak skonstruowane, iż odróżniają nierównoważne struktury. Z punktu widzenia klasyfikacji są one wręcz niezbędne, ale trudne do obliczenia. Z tego powodu, nowe metody i nowe techniki są pożądane i konieczne. Jeden z głównych sposobów postępowania opiera się tu na symetriach, które były zawsze podstawowym narzędziem w rozwiązywaniu problemów, zarówno z matematyki jak i fizyki. W badaniach przestrzeni kwantowych powstają nowe rodzaje symetrii, które służą jako kluczowy element porządkujący teorii, pozwalając na poradzenie sobie w bardzo skomplikowanych sytuacjach. Takie rozważania doprowadziły Connesa i Moscoviciego do odkrycia nowego i nieoczekiwanego typu cyklicznego homologii, znanego jako *homologie Hopf-cykliczne*.

Ze względu na jego bogatą strukturę algebraiczną, homologie Hopf-cykliczne ze współczynnikami szybko stały się nowa gałęzią badań. Pojawienie się homologii cyklicznych z ogólnymi współczynnikami było oczekiwane praktycznie od początków badań na homologią cykliczną. Wersja periodyczna homologii cyklicznych jest nieprzemiennym uogólnieniem homologii de Rhama, jednak operatory w naturalny sposób pojawiające się w geometrii wymagają „skręcenia" poprzez iloczyn tensorowy z modułem cięć nietrywialnej płaskiej wiązki wektorowej. W związku z tym brak współczynników zdolnych do odgrywania roli takiej wiązki był poważną wadą teorii cyklicznej. Mamy nadzieję, że doświadczenie zdobyte przez studiowanie homologii Hopf-cyklicznych ze współczynnikami doprowadzi do rozwiązania tego fundamentalnego problemu w geometrii nieprzemiennej.

Algebry Hopfa są algebraiczną podstawą grup kwantowych i mają kluczowe znaczenie w badaniu rozszerzeń typu Galois nieprzemiennych algebr. Algebry Hopfa pojawiają się jako kwantowe grupy Galois dla niektórych rozszerzeń ciał. Teoria rozszerzeń Hopf-Galois zapewnia jednolite algebraiczne ujęcie klasycznej teorii Galois i wiązek głównych. Możemy wtedy myśleć o takim rozszerzeniu algebry niezmienników kodziałania do definiującej ją algebry komodułowej, jako funktora z kategorii skończenie wymiarowych koreprezentacji kodziałającej algebry Hopfa, do kategorii skończenie generowanych modułów projektywnych. Ponieważ jest to kluczową cechą klasycznych wiązek głównych, nazywamy takie kodziałanie *głównym*. W duchu klasycznej geometrii różniczkowej, badamy kodziałania główne poprzez K-teorię stowarzyszonych modułów za pomocą charakteru Cherna-Galois i homologii cyklicznych.

Cykliczna homologia i kohomologia jest bez wątpienia jednym z najbardziej ciekawych odkryć współczesnej matematyki. Zapoczątkowana przez pionierskie badania Connesa, odkryta niezależnie przez Tsygana, a następnie usystematyzowana i przekształcona w pełną teorię w pracach Cuntza, Loday, Quillena i Wodzickiego, homologia cykliczna ma mnóstwo form i zastosowań w różnych działach matematyki. Wśród nowych i obiecujących zastosowań są obliczenia wykorzystujące kluczowe pojęcie *algebry dróg*.

Głównym celem badań tego projektu jest stworzenie bardzo ogólnego, ale też i konkretnego modelu homologii cyklicznych. Nowy model cykliczny powinien stosować się do algebr bez jedynki, symetrii opisywanych za pomocą mnożnikowych algebr Hopfa oraz dla topologicznie zupełnych współczynników. Realizacja naszych celów stanowiłaby znaczący postęp w jednej z najbardziej żywotnych i szeroko stosowanych nowoczesnych teorii matematycznych.