STRESZCZENIE POPULARNONAUKOWE PROJEKTU „NIERÓWNOŚCI MARTYNGAŁOWE I KONCENTRACYJNE”

MICHAŁ STRZELECKI

W matematyce bardzo często mamy do czynienia z sytuacją, w której nie jesteśmy w stanie policzyć w sposób dokładny różnych wielkości albo wzory, które opisują wynik są zbyt skomplikowane, aby być użyteczne. Jednak często wystarcza sama umiejętność oszacowania danego wyrażenia i stwierdzenie, z jakimi innnymi wielkościami się ono porównuje.

Celem projektu będzie badanie dwóch różnych rodzajów oszacowań pojawiających się w rachunku prawdopodobieństwa: nierówności martyngałowych (i ich zastosowań w analizie) oraz nierówności koncentracyjnych.

Nierówności martyngałowe. Martyngały to, mówiąc bardzo ogólnie, pewne specjalne ciągi zmiennych losowych. Do badania nierówności martyngałowych wykorzystuje się najczęściej metodę wypracowaną przez D.L. Burkholdera. Opiera się ona na szukaniu funkcji dwóch lub więcej parametrów, które spełniają dobrane do konkretnego problemu własności. Szukanie takich funkcji może być bardzo trudne, ale, co ciekawe, często odpowiedni ich dobór pozwala otrzymać nierówności dokładne, czyli z optymalnymi stałymi. Motywacją do dowodzenia tego typu nierówności jest to, że można je wykorzystać do badania ważnych obiektów pojawiających się w innych działach matematyki. Jednym z przykładów jest tutaj transformata Beurlinga-Ahlforsa, będąca ważnym narzędziem w teorii przekształceń kwazikonforemnych (czyli takich przekształceń płaszczyzny, które „prawie” zachowują kąty) i równań różniczkowych cząstkowych, z którą związany jest sławny problem otwarty postawiony przez T. Iwańca.

W projekcie będziemy badać nierówności martyngałowe, które prowadzą do nowych oszacowań m.in. dla wspomnianej wyżej transformaty Beurlinga-Ahlforsa, a w konsekwencji pozwalają na lepsze zrozumienie działania tego operatora.

Nierówności koncentracyjne. Z klasycznej nierówności izpoerymetrycznej na sferze wynika następujący fenomen: na wysokowymiarowej sferze $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ unormowana miara powierzchniowa niezmiennicza na obroty koncentruje się wokół równika (a wręcz: wokół każdego z kół wielkich (!)). Konsekwencją tego faktu jest to, że funkcje lipszycowskie (czyli funkcje o małych lokalnych oscylacjach) są z punktu widzenia tej miary praktycznie stałe. Ta elementarna, ale bardzo głęboka obserwacja, wyznaczyła ważny kierunek badań w wysokowymiarowym rachunku prawdopodobieństwa, a otrzymane wyniki znajdują liczne zastosowania w różnych działach matematyki (m.in. w statystyce i konstrukcji geometrycznych obiektów o ekstremalnych właściwościach).

W projekcie będziemy badać związki różnych metod, które pozwalają dowodzić nierówności koncentracyjnych dla miar probabilistycznych, ze szczególnym naciskiem na zależność tych metod i uzyskiwanych wyników od klasy funkcji, dla których chcemy otrzymać oszacowania koncentracyjne. Przykładowo, w powyższym przykładzie z miarą powierzchniową na sferze mówiliśmy o funkcjach lipszycowskich. Nas interesować będą zarówno sytuacje, w których chcemy uzyskać wyniki dla szerszej klasy funkcji (co musi nakładać dodatkowe warunki na miarę), jak i sytuacje, w których będziemy chcieli badać pewną specjalną, węższą klasę funkcji (co z kolei pozwala na uzyskanie wyników dla mniej regularnych miar).