POPULARNONAUKOWE STRESZCZENIE PROJEKTU

Źródłem sukcesów fizyki w epoce nowożytnej jest umiejętność powiązania procesu fizycznego z jego modelem matematycznym. Odbywa się to na dwóch poziomach, z których pierwszym jest matematyczne ujęcie praw przyrody (równania Newtona, Maxwella, Einsteina, Schrödingera), a drugim umiejętność matematycznej obróbki uzyskanych w ten sposób równań. Aparat pojęciowy teorii fizycznych jest „dopasowany" do aktualnego rozwoju matematyki. Nie tylko wykorzystuje on stan badań matematycznych w rozważanym okresie(lub wręcz jest nim inspirowany), ale także dostarcza silnych stymulacji do rozwoju matematyki w pożądanych dla siebie kierunkach. Tak się składa, że możliwość detalicznej analizy prostych, ale jednocześnie podstawowych dla danej teorii fizycznej modeli (wspomnijmy model układu dwóch ciał oddziaływujących grawitacyjnie, oscylator harmoniczny na poziomie zarówno klasycznym jak i kwantowym, model Schwarzschilda czy model atomu wodoru) może znacząco przyczynić się do sukcesu teorii.

Niestety, tylko niewielka liczba modeli posiada tę ciekawą własność rozwiązalności, którą w historycznym kontekście modeli opisywalnych równaniami różniczkowymi określa się często pojęciem *zupełna całkowalność*. Główną przyczyną niepowodzeń w uzyskaniu rozwiązania (scałkowania) danego równania różniczkowego upatruje się z reguły w nieliniowości takiego równania. Większość zjawisk w przyrodzie ma jednak charakter nieliniowy, co na przełomie XIX i XX wieku doprowadziło do pesymistycznego poglądu, że w zasadzie niewiele jesteśmy w stanie w tej dziedzinie zrobić, a przyczyna tego leży nie w naszej niewiedzy lecz w strukturze problemu. Próby otrzymania rozwiązań i ich dokładnej analizy ustąpiły miejsca technikom badań jakościowych i przybliżonych.

Dlatego też niespodzianką było wypracowanie na przełomie lat sześćdziesiątych i siedemdziesiątych XX wieku technik pozwalających na dokładną analizę i otrzymanie ścisłych rozwiązań pewnych szczególnych różniczkowych równań cząstkowych, z których najbardziej znane to równanie Kortewega—de Vriesa opisujące fale w płytkich kanałach, nieliniowe równanie Schrödingera wyprowadzone w kontekście transmisji fal świetlnych światłowodami, czy równanie Kadomtseva—Petviashvili w fizyce plazmy. W ciągu następnych 50 lat intensywnych wysiłków odkryto wiele własności równań zupełnie całkowalnych i ich związków z różnym działami matematyki czystej, takimi jak geometria algebraiczna i geometria różniczkowa, teoria grup i algebr Liego, analiza spektralna operatorów. Badania te pozwoliły także na dostrzeżenie związku takich równań z pewnymi modelami, badanymi niezależnie i odrębnymi technikami, w mechanice kwantowej czy fizyce statystycznej. Ta unifikacja spojrzenia na zupełną całkowalność wydobyła na jaw fundamentalną rolę dyskretnych (różnicowych) równań całkowalnych oraz teorii algebr Hopfa.

W ostatnim dziesięcioleciu można było zaobserwować wzrastające oddziaływanie pomiędzy teorią dyskretnych równań całkowalnych a kombinatoryką. Związek ten może być wywiedziony z badania zupełnie rozwiązalnych modeli fizyki statystycznej, chociaż istotną rolę odgrywała też teoria macierzy losowych i jej bliskie relacje z teorią reprezentacji. Prowadzone od 20 lat badania kierownika przedstawianego projektu nad geometrycznym opisem całkowalnych układów dyskretnych doprowadziły do nowego i upraszczającego spojrzenia na istotę całkowalności, jako własności zakodowanej w twierdzeniach geometrii incydencyjnej. W nowym projekcie planuje się kontynuację tych badań ze szczególnym naciskiem na zbadanie związku geometrii rzutowej nad ciałami nieprzemiennymi oraz kwantowych modeli całkowalnych. Ponadto planuje się zastosowanie technik szeregów formalnych do otrzymania rozwiązań otrzymanych w taki sposób nieprzemiennych całkowalnych układów równań dyskretnych oraz zbadanie stosowalności takich rozwiązań do teorii języków formalnych i kombinatorycznych algebr Hopfa. Istotnę część projektu stanowią także badania nad zastosowaniem teorii układów dyskretnych do konstrukcji i analizy modeli związanych z fizyką teoretyczną oraz równań opisujących fale nieliniowe.