Nr rejestracyjny: 2015/19/N/ST1/02661; Kierownik projektu: mgr Marta Strzelecka

Popularnonaukowe streszczenie projektu badawczego

Z punktu widzenia zastosowań w fizyce, statystyce czy ekonomii, zmienne gaussowskie, czyli takie, których gęstość jest krzywą dzwonową Gaussa, są niezwykle przydatne. Zazwyczaj bada się nie jedną, ale wiele próbek o rozkładzie gaussowskim. Taki ciąg n zmiennych gaussowskich nazywamy n-wymiarowym wektorem gaussowskim. Wektory gaussowskie są na tyle wyjątkowe, że wszystkie informacje o nich można odtworzyć z macierzy kowariancji, czyli tablicy $n \times n$, w której j-tej kolumnie i i-tym rzędzie stoi kowariancja j-tej i i-tej współrzędnej naszego wektora. I tak na przykład, aby współrzędne wektora gaussowskiego były niezależne, potrzeba i wystarcza, aby dwie różne współrzędne były nieskorelowane, czyli aby jedyne niezerowe wyrazy w macierzy kowariancji stały na przekątnej. Inną zaskakującą własnością jest udowodnione przez Cramera twierdzenie, że jeśli dwie niezależne kopie X i Y tej samej zmiennej losowej (czyli niezależne próbki z tego samego rozkładu) są takie, że $X - Y$ jest niezależne od $X + Y$, to X musi mieć rozkład gaussowski. Oczywiście, wspomniane własności są typowe dla wektorów gaussowskich i nie zachodzą dla żadnej szerszej klasy wektorów losowych.

Są jednak, również zaskakujące, własności rozkładu gaussowskiego, które uogólniają się na inne rozkłady. Do takich należy na przykład fenomen koncentracji dla miary gaussowskiej. Okazuje się, że funkcje lipszycowskie (czyli takie, których wzrost jest co najwyżej liniowy) odchylają się od swojej średniej względem n-wymiarowej miary gaussowskiej (czyli rozkładu wektora gaussowskiego o niezależnych współrzędnych będących standardowymi zmiennymi gaussowskimi $\mathcal{N}(0,1)$) o mniej niż t z bardzo dużym prawdopodobieństwem, eksponencjalnie bliskim jedynce. Można więc myśleć, że w wysokim wymiarze funkcje lipszycowskie z punktu widzenia miary gaussowskiej są praktycznie stałe.

Kolejną ciekawą własnością wektorów gaussowskich jest zachowanie ich momentów. Dla dowolnej normy $\|x\|$ (czyli jednorodnej odległości niezmienniczej na przesunięcia) przez p-ty moment rozumiemy $\mathbb{E}\|G\|^p$, gdzie G to nasz n-wymiarowy standardowy wektor gaussowski. Dzięki własności koncentracji wiadomo dokładnie, jak zachowuje się taki moment w zależności od p. Okazuje się, że z dokładnością do mnożenia przez stałą, niezależącą od n ani od normy, $(\mathbb{E}\|G\|^p)^{1/p}$ jest równy $\mathbb{E}\|G\| + \sigma(p, X)$. Tutaj $\sigma(p, X)$ oznacza słaby moment względem naszej normy, czyli wielkość często dużo mniejszą niż $(\mathbb{E}\|G\|^p)^{1/p}$.

Wspomnijmy jeszcze jedną własność wektorów gaussowskich, nazywaną minoryzacją Sudakowa. Mówi ona, że średnia największej współrzędnej standardowego wektora gaussowskiego zachowuje się, znów z dokładnością do pomnożenia przez stałą, jak pierwiastek logarytmu z wymiaru wektora. Tak naprawdę twierdzenie Sudakowa pozwala oszacować z dołu średnią największej współrzędnej dowolnego wektora gaussowskiego, ale pod pierwiastkiem logarytmu pojawia się wtedy nie wymiar wektora, ale wielkość zależna od geometrii przestrzeni n-wymiarowej, wyznaczonej przez macierz kowariancji.

Wspomnieliśmy, że własność koncentracji, porównywania silnych i słabych momentów oraz minoryzacja Sudakowa zachodzą dla szerszej klasy wektorów losowych niż tylko dla wektorów gaussowskich. Otóż o każdej z nich wiadomo, że zachodzi w innych szczególnych przypadkach, ale wciąż otwarte pozostają hipotezy, że każdą z tych własności z osobna posiada dowolny wektor logarytmicznie wklęsły, czyli taki, którego gęstość ma postać $e^{-f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1},x_n)}$, zaś f jest wypukła (dla wektorów gaussowskich f to symetryczny wielomian kwadratowy). Nasz projekt badawczy będzie poświęcony badaniu tego właśnie problemu – będziemy dążyć do rozstrzygnięcia tych hipotez dla kolejnych klas wektorów logarytmicznie wklęsłych. Spodziewane rezultaty pomogą zrozumieć geometryczne własności bardzo ważnej w teorii prawdopodobieństwa rodziny wektorów logarytmicznie wklęsłych, uogólniających rodzinę wektorów gaussowskich. Ponieważ zaś z własności koncentracji, porównywania momentów i zasady minoryzasyjnej Sudakowa płyną nietrywialne wnioski, wykazanie którejkolwiek z tych własności w nieznanym dotąd przypadku wprowadzi nowe narzędzie, którym będziemy mogli posługiwać się w kolejnych dowodach.