POPULARNONAUKOWE STRESZCZENIE PROJEKTU (W JĘZYKU POLSKIM)

Niniejszy projekt badawczy dotyczy zagadnień związanych z operatorami maksymalnymi i tematami pokrewnymi stowarzyszonymi z różnymi kontekstami rozwinięć ortogonalnych. W klasycznej rzeczywistej analizie harmonicznej na przestrzeniach euklidesowych fundamentalnym obiektem jest operator maksymalny Hardy'ego-Littlewooda. Projekt zakłada rozważanie jego odpowiedników w kontekstach rozwinięć ortogonalnych i stowarzyszonych półgrup ciepła. Powodem, dla którego ten obiekt jest bardzo ważny jest fakt, że zazwyczaj dominuje on inne fundamentalne operatory analizy harmonicznej, a co za tym idzie pozwala przenieść swoje własności na inne operatory. Ponadto, operatory maksymalne odgrywają kluczową rolę w rozwiązywaniu problemów dotyczących badania zbieżności punktowej (prawie wszędzie). Najbardziej znanym przykładem ich zastosowania w tym kierunku jest uzyskanie (jako prostej konsekwencji spełniania tzw. nierówności słabego typu $(1,1)$ przez operator maksymalny Hardy'ego-Littlewooda) twierdzenia Lebesgue'a o różniczkowaniu, które mówi, że

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f = f(x), \qquad \text{p.w. } x \in \mathbb{R}^d,$$

dla wszystkich (lokalnie) całkowalnych funkcji f na $\mathbb{R}^d$; tutaj $|B(x,r)|$ oznacza objętość kuli o środku w x i promieniu r.

Zasadniczym celem projektu jest zbadanie operatorów maksymalnych w kilku kontekstach rozwinięć ortogonalnych. Dokładniej, planujemy badać operatory maksymalne zbudowane na półgrupach ciepła i Poissona, które różnią się nieco od tego opisanego powyżej. (Warto podkreślić, że klasyczna półgrupa ciepła jest ważnym obiektem opisującym rozchodzenie się ciepła w różnych ośrodkach.) Jednakże motywacja do ich badania jest w zasadzie podobna. Pierwszoplanowym problemem, który nas interesuje jest zbadanie ich zachowania na podstawowych przestrzeniach funkcyjnych, takich jak przestrzenie L^p, $1 \leqslant p < \infty$. Badania będą przeprowadzone w wielu środowiskach rozwinięć ortogonalnych, na przykład:

- rozwinięcia w wielomiany ortogonalne w wielowymiarowej kuli jednostkowej,
- rozwinięcia w wielomiany Laguerre'a,
- rozwinięcia w wielomiany Jacobiego,
- rozwinięcia Fouriera-Bessela,
- ciągłe rozwinięcia typu Bessela.

Wyniki uzyskane w trakcie realizacji projektu byłyby nowe, oryginalne i stanowiłyby zauważalny wkład do rzeczywistej analizy harmonicznej, szczególnie do obszaru związanego z operatorami maksymalnymi i tematami pokrewnymi. Stanowiłyby one jednocześnie odpowiedź na bardzo ważne pytania, które pojawiły się w ostatnich latach w związku z dynamicznym rozwojem tego nurtu rzeczywistej analizy harmonicznej. Realizacja zadań zaproponowanych w projekcie wymagałaby również nowych idei i wypracowania nowych metod, które same w sobie byłyby wartościowe z punktu widzenia ich potencjalnych zastosowań w badaniach prowadzonych w przyszłości.