Zasadniczym celem niniejszego projektu jest badanie abstrakcyjnych przestrzeni Hardy'ego oraz pewnych operatorów naturalnie związanych z tego typu przestrzeniami. Historia badań przestrzeni Hardy'ego sięga początków XX wieku i łączy się z nazwiskami takich matematyków jak G. H. Hardy, F. Riesz czy J. E. Littlewood. Stopniowy rozkwit analizy funkcjonalnej i harmonicznej pozwolił z czasem na rozwój tej teorii w rozmaitych kierunkach - przestrzenie Hardy'ego pojawiają się np. w zagadnieniach związanych z równaniami różniczkowymi (badania zagadnień brzegowych eliptycznych równań różniczkowych), przy opisie przestrzeni niezmienniczych operatora przesunięcia na l^2 oraz wielu innych istotnych problemach. Z czasem zaczęto badać ogólniejsze przestrzenie - Hardy'ego–Lorentza, Hardy'ego–Orlicza lub tzw. przestrzenie $HX(\mathbb{D})$, gdzie X jest jest przestrzenią symetryczną. Zastępowano również dysk jednostkowy bardziej skomplikowanymi podzbiorami płaszczyzny zespolonej - półpłaszczyzną oraz innymi obszarami spełniającymi problem Dirichleta - obszarami wielospójnymi, których brzeg spełniał pewne dodatkowe warunki.

Jednym z najważniejszych kierunków rozwoju teorii przestrzeni Hardy'ego jest badanie specjalnych operatorów. Niewątpliwie szczególną rolę odgrywa w tym kontekście jeden z najbardziej naturalnych operatorów działających między tymi przestrzeniami - operator kompozycji. Jako argument przytoczmy tu m.in. fakt, że jedynymi izometriami na $H^p(\mathbb{D})$, $1 < p < \infty$, $p \neq 2$ są wagowe operatory kompozycji. Podstawowymi zagadnieniami badawczymi w teorii operatorów są pytania dotyczące takich własności jak ograniczoność, zwartość, słaba zwartość, absolutna $p-$sumowalność, czy opis spektrum. W przypadku operatora kompozycji głównym, celem jest znalezienie charakteryzacji tych własności w terminach funkcji generującej operator (tzw. symbol operatora). Pierwszym znaczącym wynikiem była *"Zasada podporządkowania Littlewooda"* z 1925 roku, z której wynikał wniosek o ciągłości tegoż operatora dla dowolnej funkcji generującej. Stopniowo pojawiały się bardziej wyrafinowane pytania, na przykład dotyczące zwartości operatora kompozycji na $H^p(\mathbb{D})$. Problem ten, przez wiele lat eksplorowany udało się ostatecznie rozwiązać w latach 80-tych XX wieku. J. H. Shapiro podał pełną charakteryzację zwartych operatorów kompozycji w terminach funkcji liczącej Nevanlinny, zaś B. D. MacCluer podała analogiczną charakteryzację przy użyciu miar Carlesona. Szczególnie interesujący jest fakt, że wiele istotnych własności operatora złożenia jest ściśle związanych z geometrycznymi własnościami symbolu. Dla przykładu, jeżeli $\varphi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ jest funkcją generującą operator, to jeśli obraz $\varphi(\mathbb{D})$ jest zawarty w wielokącie wpisanym w okrąg $\mathbb{T}$, to operator kompozycji $C_\varphi\colon H^p(\mathbb{D}) \to H^p(\mathbb{D})$ jest zwarty przy dowolnym p, gdzie $1 \leqslant p < \infty$. Jeśli zaś φ jest odwzorowaniem różnowartościowym oraz $\varphi(\mathbb{D})$ zawiera dysk styczny do okręgu $\mathbb{T}$, to $C_\varphi\colon H^p(\mathbb{D}) \to H^p(\mathbb{D})$ nie jest zwarty dla żadnego p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

Studia nad operatorem kompozycji w zadziwiający sposób łączą elementarne zagadnienia teorii operatorów z pięknymi klasycznymi wynikami teorii funkcji analitycznych. W przypadku bardziej skomplikowanych obszarów niż obszary jednospójne uwidaczniają się także związki z analizą harmoniczną. Tematyka badawcza projektu znajduje się więc na pograniczu trzech ważnych działów analizy matematycznej. Naszym zadaniem będzie uzyskanie interesujących wyników, które będą miały istotny wkład w rozwój tych dziedzin.