PROCESY LÉVY'EGO O CAŁKOWICIE MONOTONICZNYCH SKOKACH

POPULARNONAUKOWE STRESZCZENIE PROJEKTU

Wprowadzenie: procesy Lévy'ego. Rozważmy następujący niezwykle uproszczony model stanu wody w jeziorze. Woda wypływa z jeziora w sposób ciągły, a przybywa jej skokowo w czasie deszczu. Przyjmijmy, że ubytek wody ma stałą prędkość v, zaś deszcz jest zawsze jednakowo obfity i zmienia stan wody o wielkość Z. Przyjmijmy ponadto, że deszcz nadchodzi w nieprzewidywalnych, losowych momentach. Stan wody w chwili t opisany jest zatem wzorem $X_t = x_0 + Z \cdot N_t - v \cdot t$, gdzie N_t to (losowa) liczba opadów pomiędzy chwilami 0 i t.

Ten sam model pojawia się w *teorii kolejek*: jeśli v to szybkość obsługi zadań (np. kasowania towarów w sklepie), a Z to wielkość pojedynczego zlecenia, to X_t opisuje rozmiar kolejki. Z kolei odwrócony model pojawia się w *teorii ryzyka*: jeśli firma ubezpieczeniowa otrzymuje od klientów wpłaty w wysokości v na jednostkę czasu, zaś Z to wielkość wypłaty w razie zajścia zdarzenia objętego ubezpieczeniem, to $X_t = x_0 - Z \cdot N_t + v \cdot t$ opisuje kapitał firmy w chwili t.

Nieco bardziej realistyczny model zakłada, że obfitość deszczu, wielkość zlecenia czy kwota ubezpieczenia może za każdym razem być inna, losowa. Tak otrzymany proces można opisać wzorem

$$X_t = x_0 + (Z_1 + Z_2 + ... + Z_{N_t}) - v \cdot t,$$

gdzie v i zmienne losowe $Z_1, Z_2, \ldots$ mogą przyjmować zarówno dodatnie, jak i ujemne wartości. Wszystkie takie procesy są *procesami Lévy'ego*, czyli procesami losowymi, których przyrosty są zmiennymi losowymi niezależnymi od czasu, bieżącej wartości i wcześniejszych zmian procesu. Co więcej, w pewnym sensie każdy proces Lévy'ego ma postać zbliżoną do przedstawionej powyżej.

Proces Lévy'ego ma *całkowicie monotoniczne skoki*, jeśli rozkład zmiennych losowych $Z_1, Z_2, \ldots$ jest odpowiednio regularny; w szczególności gęstość tego rozkładu musi być funkcją rosnącą i wypukłą na przedziale $(-\infty, 0)$ oraz malejącą i wypukłą na przedziale $(0, \infty)$. Założenie to jest spełnione m.in. w modelu Craméra–Lundberga w teorii ryzyka oraz granicznych modelach w teorii kolejek.

Cel projektu. We wszystkich opisanych wyżej modelach chwila, gdy proces X_t przekracza poziom 0, ma szczególne znaczenie: oznacza to albo wyschnięcie jeziora, albo opróżnienie kolejki i bezczynność punktu obsługi, albo niewypłacalność firmy ubezpieczeniowej. Dlatego ważne jest wyznaczenie prawdopodobieństwa $P(t_0, x_0)$, że X_t osiągnie wartość ujemną choć raz przed ustaloną chwilą t_0 przy zadanej wartości początkowej x_0. (W przypadku jeziora i kolejki ważna jest także chwila, w której osiągnięty zostaje maksymalny dopuszczalny poziom). Problem ten leży u źródeł *teorii fluktuacji procesów Lévy'ego*.

Co zaskakujące, mimo kilkudziesięcioletniej historii rozwoju tej teorii wzór na $P(t_0, x_0)$ znany jest tylko w nielicznych przypadkach. Jednym z głównych celów projektu jest uzyskanie takiego wzoru (w postaci całkowej) dla procesów Lévy'ego o całkowicie monotonicznych skokach, a także badanie własności funkcji $P(t_0, x_0)$ dla ogólniejszych procesów Lévy'ego.

Projekt zakłada ponadto zbadanie analitycznych własności procesów Lévy'ego o całkowicie monotonicznych skokach, a także analogicznych procesów o wartościach wektorowych.

Znaczenie projektu. Zaplanowane badania przynależą do rachunku prawdopodobieństwa, dotyczą matematycznej teorii pewnej klasy procesów losowych. Liczne związki z innymi dziedzinami matematyki powodują jednak, że wyniki projektu doprowadzą również do rozwoju teorii równań różniczkowych i teorii potencjału.

Niektóre rezultaty mogą mieć też bardziej praktyczne zastosowania. Wyznaczanie $P(t_0, x_0)$ w modelach stosowanych w teorii kolejek, teorii ryzyka czy matematyce finansowej jest czasochłonnym zagadnieniem: stosowane są aproksymacje procesami, dla których znane są dokładne wzory, lub metody Monte Carlo (symulowanie wielu realizacji procesu). W wyniku niniejszego projektu uzyskany zostanie wzór na $P(t_0, x_0)$ dla dość szerokiej klasy procesów Lévy'ego, co może w pewnych sytuacjach uprościć obliczenia.