DYSKRETNA ANALIZA HARMONICZNA

MARIUSZ MIREK

Nasze plany badawcze będą koncentrować się wokół następujących zagadnień:

(1) Szacowań ℓ^p funkcji maksymalnych związanych z wieloparametrowymi dyskretnymi operatorami średniującymi typu Radona.
(2) Szacowań ℓ^p funkcji maksymalnych związanych z wieloparametrowymi dyskretnymi operatorami przyciętych transformat Radona.
(3) Teorii ℓ^p dla dyskretnych nieprzemiennych operatorów typu Radona: szacowania maksymalne i wariacyjne.

Motywacje do prowadzenia badań w tym kierunku są trojakie. Po pierwsze, dyskretna analiza harmoniczna jest ciągle stosunkowo młodą dziedziną, i mimo tego, że znaczący rozwój nastąpił stosunkowo niedawno, to wiele ciekawych i ważnych pytań nadal pozostaje bez odpowiedzi. Problemy, które będziemy podejmować wpisują się w dwa główne nurty dyskretnej analizy harmonicznej. Z jednej strony, będziemy badać własności dyskretnych wieloparametrowych operatorów typów Radona zdefiniowanych na powierzchniach wielomianowych. Z drugiej strony, jedenoparametrowe nieprzemienne dyskretne operatory typu Radona modelowane na odwzorowaniach wielomianowych będą przyciągały naszą uwagę. Wszystkie pytania, które zamierzamy badać wyrosły w ramach współpracy autora z profesorem Jamesem Wrightem i profesorem Eliasem M. Steinem, a ostatnio również podczas rozmów z profesorem Alexandru Ionescu.

Po drugie, problemy poruszane w tym projekcie znajdują zastosowanie w teorii ergodycznej. Użyteczność i znaczenie teorii ergodycznej w innych gałęziach matematyki (teoria prawdopodobieństwa, kombinatoryka addytywna, teoria liczb, układy dynamiczne) i poza nią (mechanika klasyczna lub mechanika statystyczna) jest nieocenione. Ostatnio, Green i Tao za pomocą narzędzi z teorii ergodycznej pokazali, że zbiór liczb pierwszych w pewnym sensie dziedziczy ‘strukturę addytywną’ ze zbioru liczb całkowitych, dowodząc istnienia dowolnie długich postępów arytmetycznych w zbiorze liczb pierwszych. Pytania ergodyczne dotyczące zbieżności punktowej, czy zbieżności w średniej mogą być stosunkowo łatwo tłumaczone na język dyskretnej analizy harmonicznej i ten aspekt jest szczególnie ważny dla nas. Problemy związane z pytaniami o zbieżność punktową wymagają bardzo zaawansowanych i subtelnych narzędzi z analizy harmonicznej. Wśród tych narzędzi są funkcje maksymalne, półnormy oscylacyjne czy r-wariacyjne. Wszystkie te obiekty będą badane w kontekście naszych pytań i rozwój w tym obszarze ma duże znaczenie dla analizy harmonicznej.

Po trzecie, inny powód, który sprawia, że dyskretna analiza harmoniczna jest tak fascynująca jest to, (jak pokazują ostatnie rezultaty), że zjawiska występujące tam mogą całkowicie różnić się od tego, co się dzieje, gdy ich ciągłe odpowiedniki są rozważane. Te okoliczności powodują, że pytania w dyskretnej analizie harmonicznej są bardzo trudne, ponieważ intuicje z klasycznej analizy harmonicznej zupełnie zawodzą. To powoduje, że pytania są bardzo ciekawe, a z drugiej strony konieczne są nowe metody.

Ten projekt ma interdyscyplinarny charakter, ponieważ wiele ciekawych pytań pojawia się na styku analizy harmonicznej, teorii liczb i teorii ergodycznej, w momencie gdy dyskretne operatory typu Radona są badane. Do tej pory wspomnieliśmy jedynie o zastosowań w teorii ergodycznej. Ale nasze problemy ze względu na ich arytmetyczną naturę mają głębokie powiązania z analityczną teorią liczb poprzez sumy eksponencjalne. Sumy eksponencjalne pojawiają się naturalnie w dyskretnej analizie harmonicznej gdy używamy transformaty Fouriera do analizy mnożników związanych z naszymi operatorami.

Sumy eksponencjalne mają ogromne znaczenie w analizie wielu problemów w analitycznej teorii liczb, zwłaszcza szacowanie ich wartości średnich jest istotne. W latach 30 ubiegłego stulecia Vinogradov wykorzystując własności translacyjno-dylatacyjnej niezmienniczości pewnych układów równań diofantycznych dokonał przełomu w szacowaniach wartości średnich związanych z sumami eksponencjalnymi. Wprowadził bardzo silne narzędzia, które implikowały szacowania daleko wybiegające poza te, które wynikały z metody różnicowej (czy typu TT^*) wprowadzonej przez Weyla czy van der Corputa. Dzięki temu znaczący postęp nastąpił w takich zagadnieniach jak problem Waringa, szacowania funkcji zeta Riemanna, ekwipartycja wielomianów modulo 1, czy ostatnio w problemach związanych z dyskretną restrykcją. Ostatnio szacowania sum eksponencjalnych okazały się być istotne dla dowodu twierdzenia Rotha dla liczb pierwszych. Mianowicie, Green udowodnił istnienie postępów arytmetycznych o długości co najmniej trzy w podzbiorach liczb pierwszych mających nieznikającą gęstość. To był punkt wyjścia do dowodu słynnego twierdzenia Greena i Tao o postępach arytmetycznych w liczbach pierwszych. Wreszcie warto podkreślić, że niedawno Helfgott przyczynił się do znacznego rozwoju w teorii sum eksponencjalnych, który zaowocował pełnym rozwiązaniem trójkowej hipotezy Goldbacha, która mówi, że każda nieparzysta liczba $N > 5$ zapisuje się jako suma trzech liczb pierwszych. W świetle tych ostatnich osiągnięć możemy w pełni docenić użyteczność sum eksponencjalnych. Jednak, w dyskretnej analizie harmonicznej sumy eksponencjalne wymagają jeszcze głębszego zrozumienia. Dlatego konieczne są dalsze badania w tym kierunku. Mamy nadzieję, że nasze plany badawcze będą również ważne w tym aspekcie.