Nr rejestracyjny: 2015/18/E/ST1/00239; Kierownik projektu: dr hab. Tomasz Jakubowski

Równania różniczkowe modelują różne obserwowane zjawiska zachodzące w fizyce, chemii, biologii, meteorologii, astronomii. Jednym z podstawowych modeli jest równanie ciepła. Wyobraźmy sobie nieskończony pręt izolowany od otoczenia tak, że nie następuje promieniowanie ciepła z pręta do otoczenia. Jeśli w pewnej chwili rozkład temperatury w pręcie jest zadany pewną funkcją $f(x)$, to w miarę upływu czasu temperatura będzie się wyrównywać i dążyć do równowagi. To, w jaki sposób i w jakim tempie zmienia się temperatura, zadane jest przez odpowiednie równanie różniczkowe. Jeśli przez $u(t,x)$ oznaczymy temperaturę pręta w chwili t w punkcie x, to funkcja u spełnia równanie ciepła przy warunku początkowym $u(0,x) = f(x)$. Funkcję $u(t,x)$ można wyrazić za pomocą f oraz jądra Gaussa-Weierstrassa, której wykres jest dobrze znaną krzywą Gaussa.

Model ten można komplikować, a nawet trzeba, bo w rzeczywistości ciepło się rozchodzi po różnych obiektach, także dwu i trzy wymiarowych. Przy układaniu równania opisującego to zjawisko należy wziąć pod uwagę kształt obszaru, w którym rozchodzi się ciepło, a także w jaki sposób następuje wymiana ciepła z otoczeniem na brzegu. Oczywiście ważne jest też z czego zrobiony jest badany przedmiot - inaczej się nagrzewa drewniany patyk, a inaczej metalowy pręt. Rozwiązanie równania ciepła z zadanym warunkiem na brzegu wyraża się za pomocą funkcji nazywanej jądrem Dirichleta.

Rozważmy teraz inny przykład. Jeśli w idealnej próżni w pewnym miejscu x_0 znalazłby się dodatni ładunek, to wytworzyłoby się pole potencjału, które można opisać za pomocą tak zwanego potencjału Newtona równego $|x-x_0|^{-1}$. Jednak jeśli ten ładunek znalazłby się w środku pewnego obszaru, np kuli, której brzeg byłby idealnie odizolowany od otoczenia, to wewnątrz kuli potencjał zadany byłby przez inną funkcję, nazywaną funkcją Greena. Funkcja ta również jest rozwiązaniem pewnego równania różniczkowego z odpowiednim warunkiem brzegowym.

Istnieje ścisły związek miedzy jądrem Dirichleta, a funkcją Greena. Związek ten, oprócz analitycznej zależności, ma także podłoże probabilistyczne. Jeśli w jakimś płynie będziemy obserwować cząsteczkę, to na wskutek zderzeń z innymi cząstkami, będzie ona poruszać się chaotycznie. Fakt ten po raz pierwszy zaobserwował w 1827 roku szkocki biolog Robert Brown, a ruch samej cząsteczki został nazwany ruchem Browna. Matematycznie zjawisko to opisywane jest w języku prawdopodobieństwa za pomocą teorii procesów losowych. Ponieważ cząstka porusza sie losowo, to można określić jedynie prawdopodobieństwo, że w danym momencie będzie znajdować się w określonym miejscu. Jeśli będziemy obserwować ruch tej cząsteczki w pewnym obszarze aż do momentu uderzenia w brzeg obszaru, to funkcja opisująca prawdopodobieństwa położenia tej cząstki jest omawianym wcześniej jądrem Dirichleta. Natomiast funkcja Greena jest związana z długością czasu, jaki cząsteczka spędza w jakimś miejscu.

Oczywiście istnieje wiele uogólnień wspomnianych modeli. W równaniu ciepła występuje druga pochodna, a w większej liczbie wymiarów operator Laplace'a. Rozważa się tutaj inne operatory w szczególności interesujące są modele z ułamkowym laplasjanem. Badane są inne procesy losowe, także takie, które poruszają się za pomocą skoków. W szczególności warte są wspomnienia procesy stabilne mające taki sam związek z ułamkowym laplasjanem, jak ruch Browna z operatorem Laplace'a.

Jak widać z podanych przykładów, teorie równań różniczkowych i prawdopodobieństwa wzajemnie się przenikają, te same funkcje występują w obu dziedzinach opisując różne zjawiska. Nie jest zatem zaskoczeniem, że pewne badania są prowadzone na styku tych dwóch dziedzin nauki i tak jest w przypadku omawianego projektu. Nasze badania będą dotyczyć obu tych teorii, jednak z większym naciskiem na stronę równań różniczkowych. Będziemy badać rozwiązania równań w jakimś sensie podobnych do równania ciepła. Można na nie patrzeć jak na zaburzone równania ciepła, gdzie przez pewne dodatkowe czynniki proces ewolucji ma inny charakter i jest opisany innym równaniem, często nieliniowym. Naszym celem jest przyjrzeć się na ile podobne są rozwiązania tych zaburzonych równań do rozwiązania równania ciepła. Czasem się zdarza, że rozwiązanie, po zaburzeniu równania, zachowuje się inaczej i takie przypadki są szczególnie interesujące. Będziemy również badać zachowania funkcji Greena i jądra Dirichleta dla pewnej klasy procesów skokowych, do której należą również procesy stabilne.