Nr rejestracyjny: 2015/18/E/ST1/00214; Kierownik projektu: dr Radosław Adamczak

Projekt dotyczy oszacowań prawdopodobieństw, że zmienne losowe zależne od dużej liczby parametrów (używane m. in. do modelowania wyników skomplikowanych doświadczeń losowych) odchylają się istotnie od swoich wartości oczekiwanych. Problematyka ta znajduje zastosowanie, gdy mimo losowej natury obserwowanego zjawiska, można z dużą dokładnością przewidzieć niektóre jego aspekty. Klasycznym przykładem tego typu, leżącym u podstaw teorii prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej, są prawa wielkich liczb, zgodnie z którymi przy pewnych naturalnych założeniach, średni wynik odpowiednio wielu niezależnych powtórzeń eksperymentu (np. obarczonego losowym błędem pomiaru ustalonej wielkości fizycznej) jest bliski wartości oczekiwanej wyniku pojedynczego eksperymentu (rzeczywistej wartości mierzonej wielkości). Prawa wielkich liczb są twierdzeniami asymptotycznymi, opisują sytuację gdy liczba powtórzeń dąży do nieskończoności, podczas gdy w wielu zastosowaniach kluczowe jest precyzyjne oszacowanie prawdopodobieństw odchyleń od średniej dla ustalonej liczby powtórzeń. Zagadnienie to badane było już na wczesnym etapie rozwoju probabilistyki, w pierwszej połowie XX w. udowodniono wiele nierówności, pokazujących, że prawdopodobieństwa uzyskania istotnej różnicy między uśrednionym wynikiem a wartością oczekiwaną maleją wykładniczo z liczbą powtórzeń. Współczesny rachunek prawdopodobieństwa pozwala na uogólnienie tych wyników na bardziej złożone zmienne losowe, zależne w regularny sposób od dużej liczby parametrów. Okazuje się, że sytuacje, gdy mimo skomplikowanej losowej struktury, istotne numeryczne charakterystyki są "prawie" deterministyczne (tzn. prawdopodobieństwa, że różnią się one znacząco od swoich wartości średnich zanikają bardzo szybko) pojawiają się często, zarówno w teorii, jak i w zastosowaniach. Zjawisko to zostało po raz pierwszy ujęte w abstrakcyjnej, nowoczesnej formie w latach siedemdziesiątych XX w. przez V. Milmana, który określił je terminem koncentracji miary. Obecnie jest ono jednym z kluczowych zagadnień teorii prawdopodobieństwa, związanym z wieloma zastosowaniami. Pozwala m. in. na przeprowadzanie obliczeń algorytmami losowymi typu Monte Carlo, przewidywanie makroskopowego zachowania układów fizycznych złożonych z dużej liczby cząstek, skrócenie czasu pomiarów medycznych lub szybkie przetwarzanie dużych danych. Teoria koncentracji miary znalazła też wiele zastosowań wewnątrz matematyki, nie tylko w obszarze rachunku prawdopodobieństwa, ale także w geometrii czy kombinatoryce, gdzie używana jest w dowodach istnienia obiektów o ekstremalnych własnościach. Nierówności koncentracyjne są również związane z zagadnieniami izoperymetrycznymi, których najbardziej klasycznym i najprostszym przykładem jest znany fakt, że ze wszystkich figur płaskich o zadanym obwodzie, największe pole ma koło. Dla koncentracji miary ważne są uogólnienia tego spostrzeżenia na bardziej skomplikowane, wysokowymiarowe sytuacje oraz odpowiedniki pojęć pole i obwód.

We wszystkich wspomnianych powyżej zastosowaniach istotne jest uzyskanie precyzyjnych oszacowań na prawdopodobieństwa zachodzenia sytuacji nietypowych. Wyniki tego rodzaju znane są obecnie zazwyczaj tylko dla tych charakterystyk liczbowych, które zależą od parametrów w sposób bardzo regularny (w większości twierdzeń odpowiednie funkcje muszą spełniać tzw. warunek Lipschitza). Ponadto, znane wyniki dotyczą z reguły bardzo specjalnych procesów losowych, posiadających wiele restrykcyjnych własności, co istotnie ogranicza ich stosowalność.

Celem projektu jest udowodnienie optymalnych nierówności koncentracyjnych w ogólniejszych sytuacjach, poprzez osłabienie założeń na regularność rozpatrywanych funkcji oraz poprzez rozszerzenie klasy analizowanych procesów losowych. W szczególności badane będą funkcje nie spełniające warunku Lipschitza. Analizowane będą także wypukłe funkcje ogólnych zmiennych losowych (znajdujące wiele zastosowań w asymptotycznej analizie geometrycznej, badającej typowe zachowanie zbiorów wypukłych w wysokich wymiarach), oraz modele losowych permutacji, motywowane przez zagadnienia biologii i fizyki. Nierówności dla funkcji wypukłych będą badane przy znacznie słabszych założeniach niż stosowane w obecnie znanych twierdzeniach. Jednym z celów projektu jest znalezienie związków między różnymi matematycznymi opisami zjawiska koncentracji dla funkcji wypukłych, analogicznych do związków znanych z klasycznej teorii dla funkcji lipschitzowskich. Uzyskane zostaną również nierówności dla sum zmiennych losowych w sytuacjach ogólniejszych niż znane obecnie, co pozwoli m. in. na nowe zastosowania do analizy losowych algorytmów typu Monte Carlo oraz w statystyce (m. in. we wnioskowaniu statystycznym dot. procesów dyfuzji oraz teorii uczenia maszynowego).

Tematyka projektu związana jest z wieloma działami matematyki. Oprócz rachunku prawdopodobieństwa istotną rolę odgrywać będzie analiza funkcjonalna, geometria, teoria równań różniczkowych cząstkowych (zwłaszcza równania Hamiltona-Jacobiego, ściśle powiązane z mechaniką), czy teoria optymalnego transportu.