

Głównym celem projektu jest osiągnięcie postępu w kilku trudnych problemach Teorii Ramseya – szerokiej dziedziny matematyki dyskretnej badającej podziałowe własności struktur kombinatorycznych. Wskazano z nich może być sformułowana poprzez kolorowania liczb całkowitych unikające pewnych wzorców na ciągach arytmetycznych. Naszą inspiracją jest słynne twierdzenie Van der Waerdena mówiące, że w dowolnym skończonym kolorowaniu liczb całkowitych istnieje jednobarwny ciąg arytmetyczny dowolnej długości.

Planujemy zaatakować dwie ważne hipotezy dotyczące wariantów zagadnienia, w których odstępami ciągów arytmetycznych są z góry określone: hipoteza Katznelsona-Ruzsy (o liczbie chromatycznej grafów różnicowych) i hipoteza Browna, Grahama, Landmana (o tzw. zbiorach dużych).

Dalszej motywacji dostarcza nam inne słynne twierdzenie – rezultat Thuego mówiący o istnieniu dowolnie długich ciągów bez repetycji (różne dwa sąsiednie bloki nie są identyczne) nad skończonym alfabetem symboli. Formułujemy kilka nowych problemów otwartych wiązanych z ciągami arytmetycznymi bez repetycji, w tym jeden o posmaku geometrycznym, inspirowany nader trudnym problemem Hadwigera-Nelsona o liczbie chromatycznej płaszczyzny (minimalna liczba kolorów potrzebna do pokolorowania płaszczyzny tak, aby żadne dwa punkty w odległości jednostkowej nie były tego samego koloru). Dwa inne problemy, które chcemy zaatakować w tym projekcie mają nieco bardziej teoriolubowy charakter. Pierwszy z nich jest naturalnym wariantem problemu samotnego biegacza mówiącego, że jeżeli n biegaczy biegnie z różnymi prędkościami wokół okręgu jednostkowego, to dla każdego z nich istnieje moment, w którym nie ma żadnego innego biegacza w odległości łukowej $1/n$. Drugi to nowa intrygująca hipoteza związana ze sławnym problemem Grahama o największym wspólnym dzielniku: wśród dowolnych n liczb całkowitych znajdziemy dwie, których odległość arytmetyczna wynosi co najmniej n . Oba te problemy mogą być sformułowane wykorzystując kombinatoryczne własności tzw. centralnych ciągów arytmetycznych.