1 Wprowadzenie.

Chcielibyśmy potrafić rozwiązywać szybko pojawiające się w życiu problemy kombinatoryczne. Jednak dla wielu takich problemów nie znamy jeszcze wystarczająco szybkich algorytmów. Pojawia się więc pytanie, czy to dlatego, że jeszcze nie odkryliśmy odpowiedniego podejścia lub narzędzi, czy może jednak istnienie takiego algorytmu jest zwyczajnie niemożliwe! Wiedząc, że zaszedł ten drugi przypadek, możemy przeformułować nasz problem i zmodyfikować go tak, aby rozwiązanie go w rozsądnym czasie stało się możliwe (patrz: aproksymacja, FPT i kernelizacja, smoothed analysis, noisy input model i inne). Wiedza o tym *dlaczego* problem jest trudny może być niezwykle pomocna w znalezieniu takiego przeformułowania.

Z drugiej zaś strony, jeżeli znamy już wydajny algorytm dla naszego problemu, chcielibyśmy również wiedzieć, czy jest on optymalny. Jeśli nie, to w poszukiwaniach optymalnego algorytmu znów pomocna może się okazać wiedza o ograniczeniach dolnych i o tym, jak dobrej złożoności możemy się spodziewać.

Naszym celem jest zbadanie ograniczeń obecnej teorii algorytmów i obecnych problemów.

2 Cel naukowy projektu.

W szczególności chcemy wykazać dokładne ograniczenia dolne dla znanych problemów przy silnych założeniach złożonościowych.

2.1 Edge Coloring.

Problem kolorowania krawędziowego, czyli problem podziału zbioru krawędzi na skojarzenia był badany prawie sto lat temu przez Kőniga. To zaowocowało słynnym Twierdzeniem Kőniga z 1916 roku. Inne ważne wyniki to Twierdzenie Shannona [11] dla multigrafów z 1949 roku oraz Twierdzenie Vizinga [13] z roku 1964. NP-trudność problemu była przez pewien czas problemem otwartym i została udowodniona w 1981 przez Holyera [6] dla grafów 3-regularnych, a w 1983 przez Levena i Galila [8] dla grafów k-regularnych dla dowolnego $k \geq 3$. Problem Edge Coloring był badany w niezliczonej ilości publikacji. Również w wielu przypadkach szczególnych, jak i modyfikacjach i uogólnieniach problemu. Najlepszy znany algorytm działa w czasie $O^*(2^m)$ [1].

2.2 Set Cover.

Set Cover jest jednym z oryginalnych 21 problemów NP-zupełnych Karpa z 1972 roku [7]. Jest równoważny problemowi Hitting Set i obejmuje wiele innych problemów jak Vertex Cover, Dominating Set, Set Packing i inne. Set Cover był intensywnie badany pod kątem ograniczeń dolnych na współczynnik aproksymacji i w 2013 roku Dinur i Steurer [3] udowodnili, że nie można osiągnąć współczynnika aproksymacji $(1 - o(1)) \cdot \ln n$ o ile $P \neq NP$ [3], co jest dokładne ze względu na algorytm zachłanny z 1979 roku [2]. Problem jest również $W[2]$-zupełny. Pomimo, że wiemy, że problem jest bardzo trudny, to nadal problemem otwartym jest pytanie czy można go rozwiązać w czasie $O^*(2^{\varepsilon n})$ dla jakiegoś $\varepsilon < 1$. Takie ograniczenie byłoby dokładne dzięki algorytmowi dynamicznemu z 2004 roku [4].

2.3 *a*:*b*-Coloring.

a:b-Coloring został wprowadzony w roku 1976 przez Stahl'a [12] jako kontynuacja linii badań z [5]. Problem występuje pod wieloma nazwami: a:b-Coloring, b-Tuple Coloring, b-Fold Coloring, Multiple Coloring i był badany w wielu publikacjach. Multi-Coloring to wariant problemu, gdzie wymagana liczba kolorów jest podana dla każdego wierzchołka osobno. Dokładna złożoność problemu a:b-Coloring jest wysoce intrygująca, gdyż z jednej strony uogólnia on Graph Coloring, ale z drugiej wydaje się być blisko programowi liniowemu będącemu relaksacją kolorowania wierzchołkowego (Fractional Chromatic Number) [9,10].

2.4 Dalsze cele.

W ciągu ostatnich kilku lat pojawiła się pewna liczba ograniczeń dolnych dla problemów wielomianowych: Longest Common Sequence, Edit Distance, Local String Alignment, Dynamic Strong Connected Components, Dynamic Single Source Reachability, Dynamic Graph Diameter, Graph Diameter (dla aproksymacji, w przeciwieństwie do naszego celu), Orthogonal Vectors. Wyniki te są konsekwencjami badań nad problemami NP-trudnymi. Zastosowana metodologia (redukcje z SAT, czasami pośrednio) jest taka jak u nas. Dlatego planujemy również badać problemy rozwiązywalne wielomianowo, jak: Triangle Detection, All Pairs Shortest Paths, Graph Diameter, 3SUM oraz Optimum Binary Search Tree w celu odkrycia ograniczeń dolnych dla ich złożoności.

3 Przyszłe znaczenie.

Praktycznie znaczenie takich odkryć jest oczywiste. Dla konkretnych sformułowań problemów wiemy jakich złożoności powinniśmy się spodziewać. Zatem wiemy albo wiemy, że jest szansa na istnienie szybszego algorytmu, albo też wiemy, że problem musi zostać przeformułowany, aby można go było szybko rozwiązać. Dlatego tego typu badania są bardzo ważne nie tylko teoretycznie, ale również z praktycznego punktu widzenia.

References

[1] A. Björklund, T. Husfeldt, and M. Koivisto. Set partitioning via inclusion-exclusion. *SIAM J. Comput.*, 39(2):546–563, 2009.

[2] V. Chvatal. A Greedy Heuristic for the Set-Covering Problem. *Mathematics of Operations Research*, 4(3):233–235, 1979.

[3] I. Dinur and D. Steurer. Analytical approach to parallel repetition. In D. B. Shmoys, editor, *Symposium on Theory of Computing, STOC 2014, New York, NY, USA, May 31 - June 03, 2014*, pages 624–633. ACM, 2014.

[4] F. V. Fomin, D. Kratsch, and G. J. Woeginger. Exact (exponential) algorithms for the dominating set problem. In J. Hromkovic, M. Nagl, and B. Westfechtel, editors, *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science, 30th International Workshop,WG 2004, Bad Honnef, Germany, June 21-23, 2004, Revised Papers*, volume 3353 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 245–256. Springer, 2004.

[5] D. Geller and S. Stahl. The chromatic number and other parameters of the lexicographic product. 1975.

[6] I. Holyer. The np-completeness of edge-coloring. *SIAM J. Comput.*, 10(4):718–720, 1981.

[7] R. M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. In R. E. Miller and J. W. Thatcher, editors, *Proceedings of a symposium on the Complexity of Computer Computations, held March 20-22, 1972, at the IBM Thomas J. Watson Research Center, Yorktown Heights, New York.*, The IBM Research Symposia Series, pages 85–103. Plenum Press, New York, 1972.

[8] D. Leven and Z. Galil. NP completeness of finding the chromatic index of regular graphs. *J. Algorithms*, 4(1):35–44, 1983.

[9] C. Lund and M. Yannakakis. On the hardness of approximating minimization problems. *J. ACM*, 41(5):960–981, 1994.

[10] E. R. Scheinerman and D. H. Ullman. *Fractional graph theory: a rational approach to the theory of graphs*. Courier Corporation, 2011.

[11] C. E. Shannon. A theorem on coloring the lines of a network. *J. Math. Phys.*, 28:148–151, 1949.

[12] S. Stahl. n-tuple colorings and associated graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 20(2):185 – 203, 1976.

[13] V. G. Vizing. On the estimate of the chromatic class of a *p*-graph. *Diskret. Analiz*, 3:25–30, 1964.
