Grafy są abstrakcyjnymi strukturami, które mają za zadanie modelować interakcje między parami obiektów. Obiekty takie są reprezentowane w grafie za pomocą *wierzchołków*, zaś interakcje za pomocą *krawędzi*, z których każda łączy pewne dwa obiekty. W ogólności wierzchołki grafu mogą reprezentować dowolny zbiór obiektów, zaś krawędzie mogą reprezentować dowolną zależność, o której można jednoznacznie stwierdzić, że zachodzi lub nie, dla dowolnej pary obiektów ze zbioru. Ta ogólność, prostota rozważanych struktur i mnogość zastosowań uczyniły teorię grafów jedną z najważniejszych i najdynamiczniej rozwijających się gałęzi matematyki skończonej. *Geometryczne grafy przecięć* stanowią szczególny rodzaj grafów służący modelowaniu pewnego typu zależności geometrycznych. W grafach takich wierzchołki reprezentują obiekty pewnej przestrzeni geometrycznej, na przykład odcinki na linii (przedziały) albo na płaszczyźnie, koła lub prostokąty na płaszczyźnie, czy też kule w przestrzeni trójwymiarowej, zaś krawędzie łączą pary obiektów, które się przecinają, czyli posiadają część wspólną.

Jednym z najstarszych i najbardziej podstawowych zagadnień podejmowanych przez teorię grafów jest *kolorowanie*. Aby wyjaśnić, na czym polega, posłużymy się przykładem problemu, który napędzał rozwój teorii grafów przez całe dziesięciolecia właściwie od samego początku jej istnienia — problemu kolorowania map czterema kolorami. Otóż wyobraźmy sobie mapę, na której narysowano linie graniczne oddzielające poszczególne państwa. Aby uczynić ją bardziej czytelną, warto państwa na mapie pokolorować w taki sposób, aby każde dwa państwa, które mają wspólny fragment granicy, otrzymały różne kolory. Nietrudno zauważyć, że trzy kolory nie zawsze wystarczają do pokolorowania w ten sposób dowolnej mapy, ale czy zawsze wystarczą cztery? Pytanie to zostało postawione w XIX wieku, ale dopiero w latach 1970-tych udowodniono (za pomocą komputerów), że ma odpowiedź twierdzącą.

Problem kolorowania map modelujemy w teorii grafów następująco. Wierzchołki grafu reprezentują poszczególne państwa, zaś krawędzie łączą każde dwa państwa, które współdzielą fragment granicy. Zadanie sprowadza się zatem do przypisania wierzchołkom kolorów w taki sposób, aby każde dwa wierzchołki połączone krawędzią otrzymały różne kolory. Kolorowanie grafu o tej własności nazywamy *poprawnym* lub *właściwym*. Warto zaznaczyć, że w ogólności w problemach kolorowania grafów *kolory* mogą być dowolnymi wartościami (np. liczbami) i zazwyczaj nie mają z prawdziwymi kolorami nic wspólnego.

W wielu praktycznych zastosowaniach używamy grafów do modelowania konfliktów w dostępie do jakiegoś zasobu. W najprostszym modelu problem takiego przydziału zasobów, które realizuje każde zapotrzebowanie, jednocześnie minimalizując łączną ilość użytego zasobu, jest to właśnie problem poprawnego kolorowania grafu. Zilustrujemy to na kilku przykładach.

1. *Szeregowanie zadań*. Mamy do wykonania pewien zbiór zadań, z których każde ma określony czas rozpoczęcia i czas zakończenia i powinno zostać przypisane do wykonania przez jedną z kilku identycznych maszyn. Każda maszyna może jednocześnie wykonywać tylko jedno zadanie. Szukamy zatem poprawnego kolorowania grafu, w którym każde zadanie jest reprezentowane przez wierzchołek, każdy konflikt pomiędzy dwoma zadaniami (czyli sytuacja, w której dwa zadania nie mogą być wykonane na tej samej maszynie) przez krawędź, zaś każda maszyna przez pewien kolor. Nietrudno zauważyć, że taki graf jest po prostu grafem przecięć przedziałów — dwa zadania są w konflikcie, jeżeli ich przedziały czasowe mają część wspólną.
2. *Przydział częstotliwości w sieciach komórkowych.* Chcemy przypisać częstotliwości nadajnikom telefonii komórkowej w taki sposób, aby żaden obszar nie był pokryty zasięgiem dwóch nadajników korzystających z tej samej częstotliwości. Szukamy zatem poprawnego kolorowania grafu, w którym wierzchołki reprezentują nadajniki, krawędzie — pary nadajników pokrywające zasięgiem pewien wspólny obszar, zaś kolory — częstotliwości. Obszar zasięgu każdego nadajnika możemy interpretować jako obiekt geometryczny na płaszczyźnie (np. koło), a wtedy rozważany graf jest po prostu grafem przecięć tychże obiektów.

Warto zauważyć, że zwykle w tego typu zastosowaniach wystarcza znaleźć kolorowanie za pomocą nie tyle minimalnej, co "odpowiednio małej" liczby kolorów. Rodzą się zatem następujące pytania: Jakie grafy można poprawnie pokolorować przy użyciu niewielu kolorów? Obecność jakich struktur w grafie wymusza użycie wielu kolorów?

Łatwo zauważyć, że poprawne pokolorowanie grafu wymaga co najmniej k kolorów, jeżeli graf ten zawiera k wierzchołków połączonych krawędziami każdy z każdym, gdyż każdy z nich musi otrzymać inny kolor. Taki zbiór k wierzchołków grafu nazywa się *kliką*. Klika wielkości k jest zatem najprostszą możliwą strukturą wymuszającą użycie k kolorów. Z drugiej strony nawet jeżeli graf nie posiada jakiejś konkretnej struktury, na przykład kliki wielkości k, nadal może wymagać użycia bardzo wielu kolorów. Na przykład istnieją grafy, które wymagają dowolnie wielu kolorów, ale nie zawierają *trójkątów*, czyli klik o 3 wierzchołkach. Losowy (czyli prawie każdy) graf o n wierzchołkach wymaga bardzo wielu kolorów (rzędu $n/\log n$), ale nie zawiera nawet bardzo małych klik (wielkości $\log n$), o ile liczba wierzchołków n jest odpowiednio duża.

Jeżeli jednak zawęzimy nasze rozważania do geometrycznych grafów przecięć, sytuacja wygląda zupełnie inaczej. Ze względu na wymaganie, aby graf posiadał geometryczną reprezentację (wykluczające losowe grafy), możliwe staje się ograniczenie wymaganej liczby kolorów za pomocą strukturalnych parametrów grafu, takich jak rozmiar największej kliki. I tak na przykład w grafach przecięć przedziałów wystarcza dokładnie tyle kolorów, ile wynosi rozmiar największej kliki. Taka równość jest w teorii grafów sytuacją dość wyjątkową i nie zachodzi dla zdecydowanej większości geometrycznych grafów przecięć. Wciąż jednak wymaganą liczbę kolorów da się ograniczyć w wielu klasach takich grafów za pomocą pewnej (choćby bardzo dużej) funkcji rozmiaru największej kliki, zaś w pozostałych klasach za pomocą niewielkiej funkcji liczby wierzchołków (rzędu $\log n$ w przypadku grafów bez trójkątów). Własności te czynią geometryczne grafy przecięć szczególnie interesującymi z teoretycznego punktu widzenia w kontekście problemów kolorowania. Jest to główny powód podjęcia tej tematyki badawczej w niniejszym projekcie. Własności te są również istotne z punktu widzenia praktycznych zastosowań. Na przykład w opisanym wcześniej problemie przydziału częstotliwości rozsądnie jest przyjąć, że graf nie zawiera dużych klik, gdyż oznaczałoby to duże zagęszczenie nadajników w jednym miejscu; wówczas wspomniane powyżej teoretyczne wyniki gwarantują, że niewielka liczba częstotliwości wystarcza do uniknięcia wszystkich konfliktów.

Od lat 1970-tych, kiedy problemy kolorowania grafów reprezentowanych geometrycznie zaczęły zyskiwać na popularności, wierzono, że w dowolnych grafach przecięć spójnych obiektów na płaszczyźnie da się ograniczyć wymaganą liczbę kolorów przez funkcję rozmiaru największej kliki. Dopiero w 2012 roku grupa badaczy (wśród nich kierownik niniejszego projektu) wykazała, że tak nie jest, wskazując konstrukcję grafów przecięć odcinków na płaszczyźnie wymagających dowolnie wielu kolorów, ale niezawierających trójkątów. Kluczowe dla znalezienia tej konstrukcji było odkrycie zależności między problemami kolorowania geometrycznych grafów przecięć a problemami kolorowania znacznie prostszych grafów, ale w sposób *on-line.* W problemach takich graf jest konstruowany stopniowo poprzez wprowadzanie nowych wierzchołków i łączenie ich krawędziami z wierzchołkami wprowadzonymi uprzednio, zaś każdy wierzchołek musi otrzymać swój kolor natychmiast po wprowadzeniu. Problemy kolorowania on-line są ważne i interesujące same w sobie, głównie ze względu na praktyczne zastosowania do modelowania systemów czasu rzeczywistego (podejmujących decyzje bez pełnej wiedzy o jej konsekwencjach). Wykorzystanie zależności między zwykłymi kolorowaniami a kolorowaniami on\dywiz line stoi u podstaw wielu kolejnych wyników podających górne i dolne oszacowania wymaganej liczby kolorów w klasach geometrycznych grafów przecięć. Również niniejszy projekt opiera się w dużej mierze na dokładnym zbadaniu i wykorzystaniu tej zależności.

Podstawowym celem projektu jest istotne poprawienie oszacowań wymaganej liczby kolorów w możliwie szerokich klasach geometrycznych grafów przecięć, w szczególności dla grafów przecięć odcinków na płaszczyźnie. Chcemy osiągnąć ograniczenia górne rzędu $\log \log n$ lub $(\log \log n)^c$ (a zatem bardzo małych funkcji liczby wierzchołków n) zamiast $\log n$. Ograniczenie rzędu $\log \log n$ byłoby optymalne, gdyż wspomniana wyżej konstrukcja wymusza właśnie $\log \log n$ kolorów. Projekt przewiduje również poszukiwanie nowych konstrukcji, w szczególności takich wymuszających więcej niż $\log \log n$ kolorów. Planujemy także poszukiwać nowych klas geometrycznych grafów przecięć, w których wymagana liczba kolorów zależy tylko od rozmiaru największej kliki, próbując jak najdokładniej zarysować granicę między takimi klasami a klasami umożliwiającymi konstrukcję wymuszającą $\log \log n$ kolorów. Dzięki naszym badaniom chcemy również zrozumieć strukturę geometrycznych grafów przecięć wymagających wielu kolorów, ale niezawierających dużych klik — na przykład to, jakie inne lokalne podstruktury wystarczy wykluczyć, aby liczba wymaganych kolorów stała się ograniczona jedynie przez funkcję rozmiaru największej kliki.

Badania prowadzone w niniejszym projekcie mają znaczenie przede wszystkim teoretyczne. Minimalna liczba kolorów wymagana do poprawnego pokolorowania grafu jest w teorii grafów parametrem jednym z najważniejszych i najintensywniej badanych, a zarazem, ze względu na swój nielokalny charakter, bardzo trudnym do obliczenia czy oszacowania dla większości grafów. Nasze badania pomogą zrozumieć jego zachowanie w szerokiej i ważnej z teoretycznego i praktycznego punktu widzenia klasie grafów, jakimi są geometryczne grafy przecięć, a w szczególności zrozumieć wpływ geometrycznej reprezentacji na możliwość ograniczenia wymaganej liczby kolorów na podstawie struktury grafu. Liczymy także na to, że wyniki tych badań pomogą znaleźć rozwiązania kilku innych znanych problemów teorii grafów pośrednio związanych z geometrycznymi grafami przecięć.