

Zadaniem projektu jest badanie współzależności między dwoma ważnymi gałęziami matematyki czystej: teorii algebr operatorowych oraz teorii układów dynamicznych. Badania będą prowadzone z perspektywy programu klasyfikacyjnego C^* -algebr, który ma za zadanie sklasyfikować skomplikowane obiekty matematyczne (C^* -algebry) poprzez mniej skomplikowane niezmienniki (uporządkowane grupy abelowe sparowane z sympleksami Choquet'a).

Matematyka czysta jest z natury przedmiotem abstrakcyjnym, napędzanym raczej przez piękno swoich konstrukcji i idei niż przez praktyczne zastosowania. Z tego powodu wydaje się, że motywacją stojącą za badaniami w matematyce czystej jest po prostu wyzwanie intelektualne, które jest zwykle zbyt zawiłe dla ogółu społeczeństwa. Jednak wiele idei zawartych w działach matematyki czystej zostało zainspirowanych przez świat przyrody, który to, choć wyabstrahowany, jest studiowany przez matematyka napędzanego ciekawością i chęcią w wielu dziedzinach. W tym projekcie dwie główne dziedziny badań to algebry operatorowe oraz układy dynamiczne. Nasza ciekawość z kolei bierze się z dwóch naturalnych pytań: Kiedy możemy rozróżnić dwa skomplikowane obiekty? Jak wiele mogą sobie przekazać dwie powiązane lecz różne dziedziny?

Początki algebr operatorowych miały związek z badaniami w dziedzinie mechaniki kwantowej. W mechanice kwantowej ważną rolę odgrywa kolejność wykonywanych obserwacji, obserwowalne pędy oraz położenia nie są przemienne. Gdyby my przedstawili te dwa pomiary jako punkt płaszczyzny xy , wzięcie jako pierwszej współrzędnej x a kolejnej y mogłoby dać inną wartość niż gdyby pierwszą była y a drugą x . W matematyce, mówiąc poglądowo, badanie „punktów w przestrzeni” jest równoważne badaniu funkcji na tej przestrzeni. Funkcje na przestrzeni również są przemienne. Możemy jednak porzucić przemienność między funkcjami, gdy rozważamy operatory na przestrzeni (Hilberta), co prowadzi do badania algebr von Neumanna oraz C^* -algebr.

Z kolei teoria układów dynamicznych szuka matematycznego formalizmu, który pozwoli opisać jak dany układ zmienia się w czasie (np. przepływ rzeki) lub badanie symetrii przestrzeni. W najprostszym przypadku możemy przedstawić system jako punkty w przestrzeni wraz z działaniem, które porusza punkty wraz z upływem czasu. Przy danym przyrodzie układ jest w określonym stanie. Sprowadza się to do działania liczb całkowitych na przestrzeni. Pomysł ten można uogólnić dla dowolnej (topologicznej) grupy działającej na przestrzeni poprzez homeomorfizmy, co może prowadzić do zrozumienia symetrii przestrzeni. Dla przykładu, grupa cykliczna sześciu elementów może działać nietrywialnie na sześciokącie przez obroty, podczas gdy cykliczna grupa o miu elementów już nie. Otrzymujemy wówczas informacje o symetrii obrotowej sześciokąta.

Na wyszym szczeblu abstrakcji możemy zastosować podejście geometrii nieprzemiennej do układu dynamicznego, zastępując przestrzeń przez C^* -algebrę oraz grupę działającą przez grupę kwantową. W istocie, te dwie dziedziny – algebry operatorowe i układy dynamiczne – mają długą historię wzajemnego oddziaływania. W szczególności ci, którzy działają na przestrzeniach i ogólniej grupy (być może kwantowe) działające na C^* -algebrach, prowadzą do powstania C^* -algebr przez konstrukcję iloczynu krzyżowego i innych powiązanych konstrukcji, które mogą kodować dynamikę. Przez nałożenie odpowiednich warunków regularności na działanie możemy kontrolować niektóre ze struktur C^* -algebr pozwalając jednocześnie na studiowanie ich z punktu widzenia programu klasyfikacyjnego.

Klasyfikacja to naturalna metodologia służąca zrozumieniu tego, co nas otacza. Jest to nie tylko przewijający się motyw w nauce (np. taksonomia jako klasyfikacja organizmów biologicznych czy układ okresowy pierwiastków chemicznych), ale też przejaw ludzkiej ciekawości: ta kolekcja budynków jest sklasyfikowana jako wieś, ale kolejna jest już miastem; ta księżka jest powieścią, a inna biografii; ta grupa ludzi jest jedną rodziną, a ta kolejną. Jaki zbiór informacji jest potrzebny by móc rozróżnić wszystkie te rzeczy?

W matematyce klasyfikacja jest nieodzownym narzędziem służącym do właściwego zrozumienia obiektów matematycznych. Odegrała ona centralną i wciąż istotną rolę w tej dziedzinie. Jakich własności możemy się spodziewać po naszych obiektach matematycznych? Czasami uznajemy pewne własności za oczywiste, a później otrzymujemy egzotyczne i patologiczne przykłady, dla których one zachodzą. Kiedy otrzymujemy izomorfizm? Czy możemy zidentyfikować niezmienniki, które pozwolą zdecydować, czy mamy izomorfizm bez konieczności jawnej konstrukcji opisującego go odwzorowania?

Program klasyfikacji C^* -algebr klasyfikuje (o rodki nuklearne) C^* -algebry przez niezmienniki K -teorii, jak również bada ich strukturę i regularność. Proponowany projekt będzie ujął spojrzenia z perspektywy klasyfikacji by badał C^* -algebry związane z topologicznymi i kwantowymi układami dynamicznymi. Dodatkowo zostaną poczynione starania, by przenieść techniki znane z klasyfikacji do świata układów dynamicznych. Skoncentrujemy się tu na własnościach strukturalnych i klasyfikacji. Przedmiot badań projektu jest z natury interdyscyplinarny: jego dalekosydnym celem jest stworzenie innowacyjnych narzędzi do klasyfikacji C^* -algebr przez zastosowanie technik znanych dla algebr von Neumanna do teorii C^* -algebr i topologicznej oraz kwantowej dynamiki. Odkrycie nowych związków między tymi dziedzinami pozwoli na ich lepsze zrozumienie.