

Koncepcje hierarchicznej kraty i odległości wprowadzone zostały przez F.J. Dysona w jego słynnej pracy dotyczącej modelu 1D ferromagnetyzmu (1969). Hierarchiczny Laplasjan, który jest powiązany z modelem Dysona badany był w kilku pracach matematycznych w przeciągu ostatnich czterdziestu lat. W artykułach tych opisane są pewne podstawowe własności hierarchicznego Laplasjanu (opis spektrum, półgrupa markowska, rezolwenta) w przypadku gdy przestrzeń stanów jest dyskretna oraz struktura hierarchicznej kraty spełnia pewne warunki symetrii (np. jednorodność, samo-podobieństwo itd.). Zakładając warunki symetrii, przestrzeń stanów może być utworzona z pewnej dyskretnej, nieskończonej grupy abelowej wyposażonej w ultrametrykę niezmienniczą ze względu na przesunięcia. Półgrupa markowska odpowiadająca Laplasjanowi jest wtedy symetryczna, niezmiennicza na przesunięcia oraz izotropowa. W szczególności spektrum Laplasjanu jest punktowe oraz wartości własne mają nieskończone wielokrotność.

Głównym celem wspomnianych wyżej artykułów było zbadanie odpowiadającego Hamiltonianu Andersona, tj. hierarchiczny Laplasjan plus pewien losowy potencjał. Oczekiwano, że uda się zaobserwować spektralną bifurkację od spektrum punktowego do ciągłego, tzn. przypuszczano, że spełniona jest słynna hipoteza Andersona. Niestety okazało się, że ostateczny rezultat jest zupełnie odwrotny: począwszy od pewnych technicznych założeń hierarchiczny Hamiltonian Andersona ma spektrum punktowe - tzw. zjawisko lokalizacji. Ponadto okazuje się, że statystyka spektrum Hamiltonianu jest poisson'owska, co zazwyczaj uznawane jest za manifestację spektralnej lokalizacji.

Systematyczne ujęcie problematyki związanej z klasami izotropowych półgrup markowskich na ultrametrycznej przestrzeni miarowej

ukazane zostało w ostatniej pracy Bendikov'a, Grigor'yana, Pittet'a oraz Woess'a. Praca ta motywowana była tematyką \textit{Spacerów losowych na grupach nieskończenie generowanych} - która stanowi klasyczny gałąź w teorii prawdopodobieństwa

i zapoczątkowana była pionierskimi pracami takich uczonych jak Erdős, Spitzer, Kesten, Molchanov, Lawler i innych.

Okazuje się, że dwa wspomniane tematy są ze sobą ściśle powiązane. Mianowicie mając daną półgrupę markowską oraz jej generator na przestrzeni ultrametrycznej z miarą, można wykazać, że odpowiada mu pewien hierarchiczny Laplasjan i na odwrót.

W projekcie wprowadzamy nową klasę operatorów: tzw. *losowe hierarchiczne Laplasjany*,

które przejawiają kilka nowych spektralnych własności. Spektrum tych operatorów wciąż jest punktowe, ale w odróżnieniu od przypadku deterministycznego istnieje ciągła gęstość stanów. Gęstość ta wpływa na spektralną bifurkację od spektrum punktowego do ciągłego. Wartości własne lokalnie opisane są przy pomocy punktowego procesu Poissona z intensywnością wyznaczoną przez gęstość stanów.

Zamierzamy opisać w sposób ilościowy (w terminach metryki Kołmogorowa lub Wassersteina) zbiorów redukcji arytmetycznych dla wartości własnych losowego hierarchicznego Laplasjanu, do standardowej zmiennej normalnej.

Wprowadzamy również empiryczny proces punktowy odpowiadający (zaburzonemu) wartościom własnym. Zakładając istnienie ciągłej gęstości stanów, chcemy udowodnić, że rozkłady skończone wymiarowe empirycznego procesu zbiegają do rozkładów skończone wymiarowych punktowego procesu Poissona. Ponadto zamierzamy oszacować tempo zbiegania do aproksymacji poisson'owskiej i wyrazić je w terminach metryki całkowitej wariacji.

W projekcie zamierzamy stosować klasyczne metody funkcji charakterystycznych oraz metod Chena-Steina operatorów charakteryzujących.

Jako przykład rozważymy między innymi losowe zaburzenia (przy pomocy zmiennych losowych Bernoulli'ego) operatora ułamkowej pochodnej Taiblesona-Vladimirova określonego na pierścieniu liczb p -adycznych.