Tytuł projektu: Własności rozwiązań równań nielokalnych.

Pierwszym celem projektu jest zbadanie pewnych fundamentalnych własności rozwiązań zagadnień brzegowych dla operatorów nielokalnych w R^d. Ważnym przykładem takiego zagadnienia jest

$$((-\Delta + m^2)^{(1/2)} - m)\ \varphi_n(x) = \lambda_n\ \varphi_n(x), \qquad \text{dla } x \text{ z } D,$$
$$\varphi_n(x) = 0, \qquad \text{dla } x \text{ z } D^c,$$

na wypukłym obszarze ograniczonym D w R^d, gdzie $m \geq 0$. Takie zagadnienie własne występuje w pewnych modelach relatywistycznej mechaniki kwantowej, zaś sam operator nielokalny $H = (-\Delta + m^2)^{(1/2)} - m$ nazywany jest (kwasi-)relatywistycznym hamiltonianem lub połówkowym operatorem Kleina-Gordona (ang. square root Klein-Gordon operator).

W ramach tego projektu planujemy badanie pewnych subtelnych własności rozwiązań tego zagadnienia takich jak p-wklęsłość pierwszej funkcji własnej φ_1 oraz liczba obszarów nodalnych funkcji własnych φ_n. Motywacje do studiowania takich problemów pochodza nie tylko z matematyki, ale również z fizyki matematycznej. Dla przykładu, udowodnienie p-wklęsłości φ_1 pozwoliłoby na uzyskanie dobrych oszacowań odstępu spektralnego $\lambda_2 - \lambda_1$. Podobne własności dla klasycznych zagadnień z operatorem $-\Delta$ zamiast $(-\Delta + m^2)^{(1/2)} - m$ są dobrze znane.

Zamierzamy również zajmować się podobnymi zagadnieniami własnymi dla bardziej ogólnych operatorów nielokalnych, gdzie $(-\Delta + m^2)^{(1/2)} - m$ jest zastąpiony przez -L, gdzie L jest generatorem procesu Lévy'ego w R^d. Planujemy badać także inne równania, takie jak $L\ \varphi = -1$ w wypukłych obszarach ograniczonych z zewnętrznymi warunkami brzegowymi Dirichleta.

Drugim celem projektu jest zbadanie własności asymptotycznych i pewnych własności spektralnych pewnych równań parabolicznych dla losowych nielokalnych operatorów Schrödingera. Przedmiotem naszych badań będzie zagadnienie początkowe

$$\partial_t\ u(t,x) = L\ u(t,x) - V^\omega(x)\ u(t,x), \qquad \text{dla } x \text{ z } R^d \text{ oraz } t > 0,$$
$$u(0,x) = u_0(x), \qquad \text{dla } x \text{ z } R^d,$$

gdzie L jest generatorem symetrycznego procesu Lévy'ego w R^d lub lub subordynowanej dyfuzji o fraktalnej przestrzeni stanów, a V^ω jest stacjonarnym polem losowych (zwanym potencjałem), głównie typu poissonowskiego. Reprezentatywnym przykładem operatora z tej klasy jest wspomniany powyżej generator tzw. procesu relatywistycznego $L = -(-\Delta + m^2)^{(1/2)} + m$, $m \geq 0$. Zagadnienia tego typu były szeroko badane w przypadku klasycznych losowych operatorów Schrödingera $-\Delta + V^\omega$ i operatorrów losowych na kracie Z^d.

Zamierzamy zbadać asymptotykę uśrednioną (ang. annealed) oraz prawie wszedzie (ang. quenched) rozwiązań u(t,x), gdy czas t dąży do nieskończoności, oraz istnienie i asymptotykę w prawostronnym otoczeniu infimum spektrum (np. efekt typu Lifschitza) całkowej gęstości stanów (ang. integrated density of states (IDS)) dla losowych nielokalnych operatorów Schrödingera $-L+V^\omega$. Jesteśmy również zainteresowani asymptotyką przestrzenną u(t,x).

Problem paraboliczny, którym chcemy się zajmować, można zinterpretować probabilistycznie jako chaotyczny ruch cząstki w środowisku losowym. Procesy stochastyczne w ośrodkach losowych są jednym z kluczowych tematów we współczesnej teorii prawdopodobieństwa. Z powodu licznych i ważnych zastosowań w fizyce, chemii i biologi, ale także z powodów czysto matematycznych, od wielu lat znajdują się w kręgu zainteresowań wybitnych probabilistów i fizyków matematycznych. Fizyczne podstawy do badania takich zagadnień pochodzą od amerykańskiego fizyka i noblisty P. W. Andersona, który zaobserwował silne zjawisko lokalizacji w układach losowych, nazwane potem lokalizacją Andersona.

Obecnie można zaobserwować wzmożonone zainteresowanie modelami opartymi na procesach skokowych i operatorach nielokalnych, jednak subtelne własności nielokalnych losowych operatorów Schrödingera i skokowych procesów Markowa ewoluujących w środowisku losowym są nadal bardzo słabo zrozumiane. Postawione przez nas problemy badawcze dotyczą zupełnie podstawowych własności rozważanych losowych zagadnień parabolicznych i są motywowane wynikami klasycznymi. Jednak z powodu nielokalności operatorów występujących po prawej stronie równania są znacznie trudniejsze do badania niż ich odpowiedniki klasyczne.