Zasadniczym celem rachunku wariacyjnego jest znajdowanie minimów i maksimów takich funkcji, które zależą od nieskończonej liczby zmiennych. Początki teorii rachunku wariacyjnego sięgają 1696 roku, kiedy Johann Bernoulli rozwiązał zagadnienie brachistochrony. Problem polegał na znalezieniu krzywej, po której powinien się ześlizgiwać punkt materialny, żeby pod wpływem grawitacji dotrzeć w najkrótszym czasie z danego punktu *a* do danego *b* (na płaszczyźnie pionowej), taką krzywą najszybszego spadku okazał się łuk cykloidy. W XX wieku w wyniku rozkwitu analizy funkcjonalnej rachunek wariacyjny doznał burzliwego rozwoju.

Związki rachunku wariacyjnego z równaniami różniczkowymi są następujące. Załóżmy, że chcemy rozwiązać pewne równanie różniczkowe cząstkowe $A[u]=0$. Załóżmy dodatkowo, że operator A jest "pochodną" odpowiedniego funkcjonału energii I. Wówczas nasze równanie przybiera postać $I'[u]=0$. Zaletą tego zapisu jest to, że teraz możemy utożsamić rozwiązania powyższego problemu z punktami krytycznymi funkcjonału I (między innymi minimami i maksimami). Oczywiście nie każde równanie można zapisać w takiej postaci, takie równania nazywamy *zagadnieniami wariacyjnymi*.

Przyjrzyjmy się teraz zagadnieniu Dirichleta dla operatora Laplace'a. Problem polega na znalezieniu gładkich funkcji $u:\Omega\rightarrow\boldsymbol{R}$ spełniających równanie: $\Delta u=0$ na Ω, przy ustalonym warunku brzegowym u=φ na brzegu Ω.

W roku 1900 Dawid Hilbert ogłosił, że udało mu się rozwiązać to zagadnienie przez zasadę Dirichleta. Zasada ta orzeka, że każde rozwiązanie minimalizuje **energię Dirichleta**, zdefiniowaną jako: $\boldsymbol{E}(v)=\int_\Omega |Dv|^2dx$, w klasie przekształceń $v:\Omega\rightarrow\boldsymbol{R}$ spełniających warunek brzegowy $v=\varphi$ na brzegu Ω.

Okazało się jednak, że rozumowanie Hilberta miało lukę. Problem ten wyznaczył trend w matematyce co najmniej na 40 lat, a jego uogólnienia, z uwagi na związki z geometrią i fizyką, są badane do dziś. Chodziło o znalezienie ścisłego dowodu na to, że

- istnieje funkcja realizująca minimum energii Dirichleta,
- udowodnienie, że funkcja ta jest gładka i spełnia równanie $\Delta u=0$ na Ω.

Wreszcie udało się to w 1940 roku Hermannowi Weylowi, tym samym dając rachunkowi wariacyjnemu solidne podstawy.

W latach czterdziestych ubiegłego wieku rozpoczęto rozpatrywanie innych podobnych zagadnień. Pierwsze uogólnienia dotyczyły wyników dla funkcji o wartościach wektorowych $u:\Omega\rightarrow\boldsymbol{R}^k$, następnie rozpoczęto rozważanie funkcji o wartościach w k-wymiarowych rozmaitościach $\boldsymbol{N}$ (Jeśli ktoś nie zna pojęcia rozmaitości, niech wyobrazi sobie, że $\boldsymbol{N}$ to gładka powierzchnia bez samoprzecięć, jak powierzchnia kuli, lub elipsoidy, lub dętki rowerowej).

Aby uzasadnić rozpatrywanie przekształceń o wartościach w rozmaitościach przyjrzyjmy się następującemu przykładowi. Oglądając mapy połączeń oferowanych przez linie lotnicze widzimy, że trajektoria, po której poruszają się samoloty jest zakrzywiona. Jest to sprzeczne z naszą intuicją: najkrótsza droga powinna prowadzić po odcinku prostej. Przyczyną tej sprzeczności jest prosty geometryczny fakt: powierzchnia Ziemi jest okrągła, a najkrótsze drogi z jednego punktu do drugiego prowadzą po łukach okręgów wielkich. Wybór trajektorii lotu jest prostą ilustracją wariacyjnego problemu w geometrii: znajdowania geodezyjnych, czyli ścieżek na danej powierzchni o najkrótszej długości.

Te uogólnienia doprowadziły do **przekształceń harmonicznych**. Rozważmy ponownie funkcjonał Dirichleta, tym razem dla u o wartościach w rozmaitości $\boldsymbol{N}$. Dzięki pracy Johna Nasha wiemy, że taka rozmaitość może być zanurzona w przestrzeń euklidesową $\boldsymbol{R}^N$ (na przykład sfera dwuwymiarowa jest podzbiorem trójwymiarowej przestrzeni $\boldsymbol{R}^3$). Musimy określić klasę przekształceń, w której rozważamy powyższe zagadnienie. Rozsądne jest, aby dopuścić nie tylko przekształcenia gładkie o wartościach w $\boldsymbol{N}$. Zauważmy, że aby funkcjonał był dobrze określony, wystarczy żeby nasze przekształcenie miało słabą pochodną (czytelnik, któremu przestrzenie Sobolewa nie są znane powinien wiedzieć, że rozpatruje się osłabienie pojęcia pochodnej, to znaczy idea funkcji różniczkowalnych rozszerza się do klasy funkcji, dla których całkowanie przez części jest dobrze określone), która jest całkowalna z kwadratem, czyli, aby przekształcenie należało do przestrzeni Sobolewa $W^{1,2}$. Niestety przestrzenie Sobolewa o wartościach w rozmaitościach tracą wiele dobrych właściwości, np. nie są liniowe. Oznacza to, że suma przekształceń z takiej przestrzeni zazwyczaj nie będzie należała do tej samej przestrzeni, gdyż nie będzie miała wartości w tej samej rozmaitości. To stwarza wiele problemów i znacznie uszczupla zasób narzędzi jakich można używać do badania takich przekształceń. Okazuje się, że równanie, które spełniają przekształcenia harmoniczne, ze względu na warunek, że u ma wartości w $\boldsymbol{N}$, jest nieliniowe. Dla przykładu, jeśli $\boldsymbol{N}$ jest sferą, równanie to przybiera postać:

$$-\Delta u_i = |Du|^2 u_i \text{ dla } i=1,...,m.$$

Rozwiązania takiego układu równań mają zupełnie inne własności. Po pierwsze okazuje się, że punkty krytyczne funkcjonału Dirichleta niekoniecznie są przekształceniami minimalizującymi. Ponadto nie mamy jednoznaczności w klasie zagadnień z zadanym warunkiem brzegowym, a rozwiązania tego układu równań mogą być nieciągłe. Znana jest konstrukcja rozwiązania, które nie jest ciągłe w żadnym punkcie dziedziny! Obecność takich punktów, zwanych punktami osobliwymi, cieszy badaczy, bo odpowiada (w jakimś zakresie) temu, co obserwuje się doświadczalnie w zachowaniu nematycznych ciekłych kryształów, których uproszczonym modelem są przekształcenia harmoniczne o wartościach w sferze.

Równania przekształceń harmonicznych mają pewne specjalne własności dla płaskich obszarów Ω. Mianowicie, energia Dirichleta jest niezmiennicza ze względu na złożenia z przekształceniami konforemnymi (przekształcenie konforemne, to takie, które zachowuje kąty między krzywymi w punktach ich przecięcia). Przekształcenia harmoniczne zdefiniowane na płaskich obszarach są ciągłe, nieciągłości pojawiają się dopiero w wyższych wymiarach.

Funkcjonały konforemnie niezmiennicze są bardzo ważne we współczesnej matematyce. Poszukiwania funkcjonału konforemnie niezmienniczego w wymiarze 4 prowadzą do funkcjonału Hessego $\boldsymbol{H}(u)=\int_\Omega|\Delta u|^2\, dx$. Tutaj klasą przekształceń dopuszczalnych będą już przekształcenia o wyższej regularności: potrzebna jest całkowalność kwadratów wszystkich drugich pochodnych. Ponownie rozpatrujemy przekształcenia o wartościach w dowolnej rozmaitości N. Punkty krytyczne tego funkcjonału nazwiemy **przekształceniami biharmonicznymi**. Tym razem układ równań odpowiadający punktom krytycznym funkcjonału Hessego jest układem równań czwartego rzędu, którego rozwiązania mają wiele zaskakujących własności: nie ma jednoznaczności rozwiązań dla zadanego warunku brzegowego, rozwiązania nie muszą być ciągłe, a przekształcenia minimalizujące nie są jedynymi punktami krytycznymi funkcjonału Hessego. Podobnie jak w przypadku przekształceń harmonicznych wiadomo, że w przypadku konforemnie niezmienniczym wszystkie przekształcenia biharmoniczne muszą być ciągłe. W wyższych wymiarach mogą pojawiać się punkty, a nawet zbiory, na których przekształcenia te nie są ciągłe.

Najważniejszym celem niniejszego projektu jest wykazanie, że w wymiarze wyższym niż 4 istnieje takie otoczenie brzegu, na którym minimalizujące przekształcenia dla zadanego warunku brzegowego są ciągłe. Zupełnie jakby gładki warunek brzegowy z jednej strony mógł wymuszać istnienie osobliwości, z uwagi na swoją strukturę w makroskali, z drugiej zaś, ze względu na gładkość, odpychał te osobliwości od brzegu obszaru niczym niewidzialna poduszka. Taka informacja pozwoliłaby nam na wyprowadzenie wielu ważnych własności minimalizujących przekształceń biharmonicznych. Spodziewamy się, że efektami tego projektu będzie konstrukcja specyficznych przykładów przekształceń biharmonicznych, zrozumienie mechanizmów rządzących powstawaniem osobliwości w wymiarze 5, a także zrozumienie jak może wyglądać zbiór punktów, w których przekształcenie biharmoniczne nie jest ciągłe.

Pragnienie matematyków polega także na tym, żeby w pełni zrozumieć zachowanie rozwiązań równań różniczkowych cząstkowych, z uwagi na obecność takich równań w wielu problemach geometrii i fizyki. Ze względu na trudności techniczne i liczne wyzwania ten proces trwa długo, całymi dekadami, podobnie jak cała historia matematyki. Powodem wielu badań o charakterze teoretycznym jest po prostu najlepiej rozumiana ciekawość: pragnienie zrozumienia jakiegoś problemu do końca, albo przynajmniej głębiej, niż dotychczas, mimo wysiłków, rozumieli go inni. Każde pokolenie matematyków dokłada w ten sposób swoje drobne cegiełki do olbrzymiej konstrukcji matematyki. Niniejszy wniosek jest po prostu jednym z licznych przedsięwzięć tego typu: z jednej strony skromnym, z drugiej strony - wyraźnie wpisanym w nieliniową analizę matematyczną i teorię równań cząstkowych.