

Grafi s abstrakcyjnymi strukturami, które maj za zadanie modelowa interakcje mi dzy parami obiektów. Obiekty takie s reprezentowane w grafie za pomoc wierzchołków, za interakcje za pomoc kraw dzi, z których ka da ł czy pewne dwa obiekty. W ogólnoci wierzchołki grafu mog reprezentowa dowolny zbiór obiektów, za kraw dzie mog reprezentowa dowoln zale no , o której mo na jednoznacznie stwierdzi , e zachodzi lub nie, dla dowolnej pary obiektów ze zbioru. Ta ogólnoci , prostota rozwa anych struktur i mnogo zastosowa uczyniły teori grafów jedn z najwa niejszych i najdynamiczniej rozwijaj cych si ga ł zi matematyki sko czonej i informatyki teoretycznej.

Geometryczne grafi przeci stanowi szczególny rodzaj grafów słu cy modelowaniu pewnego typu zale no ci geometrycznych. W grafach takich wierzchołki reprezentuj obiekty pewnej przestrzeni geometrycznej, na przykład odcinki na linii (przedziały) albo na płaszczy nie, koła lub prostok ty na płaszczy nie, czy te kule w przestrzeni trójwymiarowej, za kraw dzie ł cz pary obiektów, które si przecinaj , czyli posiadaj cz i wspóln . Grafi takie znajduj praktyczne zastosowania w problemach alokacji zasobów, szeregowania zada , sekwencjonowania struktur DNA czy projektowania układów scalonych.

Problemy obliczeniowe, czyli polegaj ce na zaprojektowaniu algorytmu do wykonania pewnych oblicze dla dowolnie ustalonych danych, zazwyczaj klasyfikuje si w informatyce teoretycznej jako łatwe lub trudne obliczeniowo. Łatwe s te, które mo na rozwi za algorytmem wielomianowym, czyli algorytmem wykonuj cym co najwy ej n^c operacji, gdzie n jest rozmiarem danych wej ciowych, a c pewn sta ł . Trudne s te problemy, dla których przypuszcza si (w oparciu o ogólnie akceptowane hipotezy teorii zło ono ci obliczeniowej), e takiego algorytmu nie maj .

Podstawowym problemem obliczeniowym dla ka dej klasy grafów jest rozpoznawanie grafów tej klasy. W przypadku grafów reprezentowanych geometrycznie polega ono na stwierdzeniu, czy abstrakcyjny graf (podany w postaci listy wierzchołków i kraw dzi) ma wła ciw dla danej klasy reprezentacj . Problemy rozpoznawania klas grafów rozwa nane były ju w latach 1970-tych i dla wielu klas grafów doczekały si zadowalaj cych rozwi za — wielomianowych algorytmów lub dowodów trudno ci obliczeniowej. Wszystkie klasy grafów rozpatrywane w niniejszym projekcie maj wielomianowe algorytmy rozpoznawania. Istniej tak e klasy geometrycznych grafów przeci , których rozpoznawanie jest obliczeniowo trudne, na przykład klasa grafów przeci kół lub prostok tów na płaszczy nie.

Problemy badawcze niniejszego projektu dotycz dwóch uogólnie problemów rozpoznawania: problemów rozszerzania cz ciowych reprezentacji grafów oraz problemów modyfikacji grafów.

W problemie rozszerzania cz ciowych reprezentacji pytamy, czy podany na wej ciu graf ma wła ciw dla klasy reprezentacj rozszerzaj c podan na wej ciu reprezentacj pewnej cz ci grafu. Szczególnie ciekawe wydaje si pytanie, w których klasach grafów konstruowanie reprezentacji w oparciu o cz ciowe rozwi zanie jest trudniejsze obliczeniowo ni budowanie takiej reprezentacji zupełnie od podstaw. Warto zauwa y , e podczas gdy w problemie rozpoznawania wystarczy znale tyko jedn reprezentacj wiadczy c o przynale no ci grafu do danej klasy grafów, w przypadku problemów rozszerzania cz ciowych reprezentacji cz sto wymagane jest zrozumienie struktury wszystkich mo liwych reprezentacji.

Aby zilustrowa ró nic mi dzy problemami rozpoznawania i rozszerzania cz ciowych reprezentacji, posłu ymy si przykładem grafów planarnych, czyli grafów, które mo na narysowa na płaszczy nie, unikaj c jakichkolwiek przeci mi dzy kraw dziami. Dla problemu rozpoznawania nie ma znaczenia, czy rysujemy kraw dzie za pomoc dowolnych linii ci głych czy za pomoc odcinków prostych — ka dy graf narysowany w ten pierwszy sposób mo na równie narysowa w ten drugi i istniej wielomianowe algorytmy, które tak reprezentacj konstruuj . W problemie rozszerzania cz ciowych reprezentacji grafów planarnych na płaszczy nie narysowane s tylko niektóre wierzchołki i kraw dzie, a zadaniem algorytmu jest dorysowanie wszystkich pozostałych w sposób unikaj cy przeci . Zadanie takie w formie uproszczonej cz sto wykonuj dzieci, gdy staraj si po ł czy dwa punkty rysunku (np. mysz i serek), unikaj c niepotrzebnych przeci z narysowanymi liniami. Problem ten mo na rozwi za za pomoc wielomianowego algorytmu, je eli kraw dzie mo na reprezentowa dowolnymi liniami ci głymi. Kiedy jednak wymagamy, aby były one narysowane jako odcinki proste, problem staje si obliczeniowo trudny.

Jednym z celów niniejszego projektu jest znalezienie wielomianowych algorytmów lub wykazanie trudno ci obliczeniowej problemów rozszerzania cz ciowych reprezentacji w klasach grafów przeci , w których pozostaje on nadal nierozwi zany. W ród tych klas grafów najbardziej znane s grafi przeci łuków okr gu oraz trapezów rozpi tych mi dzy dwiema równoległymi liniami. Problem rozszerzania cz ciowych reprezentacji w tych klasach grafów jest szczególnie ciekawy, gdy nie jest znany aden opis struktury wszystkich mo liwych reprezentacji.

Drug grup zagadnie poruszanych w niniejszym projekcie stanowi problemy modyfikacji grafów, rozwa nane ju w latach 1970-tych i nadal stanowi ce wa ny nurt bada z pogranicza teorii grafów i algorytmiki. W problemie modyfikacji grafów do klasy grafów C pytamy, czy podany na wej ciu graf mo na tak zmodyfikowa , wykonuj c co najwy ej k operacji pewnego okre lonego typu, aby powsta ł z niego graf nale cy do klasy C . Główny nacisk w tym projekcie poło ony jest na problemy usuwania, w których jedyn dozwolon operacj modyfikacji grafu jest usuni cie wierzchołka wraz ze wszystkimi przyległymi kraw dziami. Praktyczne zastosowania problemów modyfikacji obejmuj problemy uwiarygodniania danych uzyskanych w wyniku eksperymentów, których wyniki mog by nieznacznie przekłamate. Podej cie to wykorzystywane jest na przykład w biologii molekularnej do sekwencjonowania struktur DNA.

Dla wszystkich "rozdnych" klas grafów problem usuwania jest trudny obliczeniowo, je eli warto parametru k okrelaj cego maksymaln dozwolon liczb modyfikacji jest traktowana jako cz danych wej ciowych na równi z grafem. Interesuj ce z praktycznego punktu widzenia s jednak tylko takie dane wej ciowe, w których graf mo e by bardzo du y, ale parametr k jest mały. Załoenie to znajduje teoretyczne odzwierciedlenie w tzw. algorytmach FPT, które dla grafów wej ciowych o n

wierzchołkach i dla parametru k wykonują co najwyżej $f(k)n^c$ operacji, gdzie f jest pewną funkcją, a c pewną stałą. W praktyce zatem dla małych wartości parametru k algorytmy FPT działają jak algorytmy wielomianowe. W przypadku problemów z parametrem za obliczeniowo łatwe uznajemy te problemy, które mają algorytmy FPT.

Problemy modyfikacji grafów do klasy grafów C wymagają innego podejścia niż problemy rozszerzania czy ciowych reprezentacji. W konstrukcji algorytmów FPT wykorzystuje się zazwyczaj charakteryzację klasy C poprzez tzw. *struktury zabronione*. Charakteryzacja taka mówi, że graf należy do klasy grafów C wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera żadnej struktury z listy struktur zabronionych. Algorytmy FPT do problemów usuwania wierzchołków do klasy grafów C muszą zidentyfikować wszystkie struktury zabronione w grafie wejściowym i zbadać ich interakcje, tak aby wskazać co najwyżej k wierzchołków, których usunięcie z grafu spowoduje zniszczenie wszystkich występujących w nim struktur zabronionych.

Dla kilku klas geometrycznych grafów przecięcia, na przykład dla grafów przecięcia przedziałów na linii, znane są już algorytmy FPT do problemu usuwania. Naszym celem w pierwszej kolejności jest znalezienie algorytmów FPT lub wykazanie trudności obliczeniowej problemów usuwania wierzchołków do klasy grafów porównywalności (czyli grafów, których krawędzie reprezentują relacje bycia mniejszym/większym w pewnym porządku) oraz związanych z nimi grafów permutacji. Struktura tych grafów jest dość dobrze poznana, co może pomóc zrozumieć interakcje między strukturami zabronionymi znanymi w grafach wejściowych. W dalszej perspektywie planujemy również badania nad problemem usuwania do wspomnianej wyżej klasy grafów przecięcia łuków, dla których dopiero bardzo niedawno pojawiła się charakteryzacja przez struktury zabronione.

Liczymy na to, że prace nad problemami usuwania pozwolą lepiej zrozumieć strukturalne własności rozpatrywanych grafów przecięcia, a być może nawet zaowocują nowymi ogólnymi technikami projektowania algorytmów FPT.