Hamiltonianem to "funkcja energii", która definiuje tzw. równania Hamiltona. Jednym z celów niniejszego projektu jest zbadanie własności rozwiązań równań Hamiltona. Rozwiązania te są ważne chociażby dlatego, że opisują ewolucje układów fizycznych. Stosują się między innymi do mechaniki klasycznej czy elektrodynamiki.
Znalezienie dokładnych rozwiązań dla dowolnego Hamiltonianu (tzn. funkcji energii) jest w ogólności niemożliwe. Przybliżone rozwiązania znajduje się przy pomocy metod numerycznych. Wadą takiego podejścia jest fakt, że rozwiązania nie muszą być stabilne tzn. przy drobnej zmianie Hamiltonianu rozwiązanie może zmienić sie w sposób diametralny. Z tego powodu zdecydowaliśmy się badać powyższe równania metodami topologicznymi. Metody topologiczne nie dają nawet przybliżonych rozwiązań ale za to wychwytują pewne ich własności. Na przykład dla niektórych układów fizycznych jesteśmy w stanie stwierdzić, ile co najmniej jest rozwiązań periodycznych tzn. takich, że układ wraca po pewnym czasie do stanu początkowego. Co więcej metody topologiczne dają te same odpowiedzi dla wszystkich podobnych (bliskich w matematycznym sensie) Hamiltonianów. Zwróćmy uwagę, że w zastosowaniach nigdy nie znamy dokładnej postaci funkcji energii, a tylko jej przybliżenie.
Niezmiennik topologiczny, którego mamy zamiar użyć, nazywa się indeksem Conleya, nazwany po wybitnym amerykańskim matematyku C.Conleyu. Aby wykorzystać idee C.Conleya musimy uogólnić definicje, które on podał na przypadek przestrzeni nieskończenie wymiarowej. Niestety w przypadku przestrzeni nieskończenie wymiarowych wszelkie intuicje przestają działać. Dlatego drugim celem naszego projektu jest właśnie zbudowanie teorii indeksu Conleya właśnie na takich przestrzeniach. Pewne konstrukcje zostały już przez autorów projektu wykonane, ale wciąż wymagają dopracowania. W szczególności chcielibyśmy, aby nasz indeks można było łatwo wyliczyć, co ma duże znaczenie w zastosowaniach.
Wreszcie w trzeciej częsci projektu chcemy się zająć zastosowanie skonstruowanego przez nas niezmiennika do innej klasy równań niż Hamiltonowskie. Mianowicie do równań Seiberga-Wittena. E.Witten jest jedynym fizykiem, który otrzymał najwyższe odznaczenie matematyczne - medal Fieldsa. Równania Seiberga-Wittena pochodzą z fizyki kwantowej, ale obecnie mają też bardzo duże zastosowanie w samej matematyce. W szczególności w geometrii 3 i 4 wymiarowych rozmaitości. Matematycy od dawna próbowali sklasyfikować obiekty, które nazywamy rozmaitościami. W przypadku wymiarów 1 i 2 wiemy wszystko. Okazuje się, że gdy wymiar jest większy od 5 to klasyfikacja jest łatwiejsza niż w wymiarach 3 i 4. To właśnie te dwa wymiary sprawiają najwiękse trudności. Równania Seiberga-Wittena i zdefiniowane dzięki nim niezmienniki Seiberga-Wittena mają na celu przybliżenie nas do zrozumienia 3 i 4 wymiarowych rozmaitości. W projekcie chcemy pokazać, że można użyć indeksu Conleya do badania równań Seiberga-Wittena.