

W modelowaniu wielu zjawisk otaczających nas światu używa się procesów stochastycznych. Przykładami są różne procesy fizyko-chemiczne (np. dyfuzja), biologiczne (przekazywanie genów między kolejnymi pokoleniami) lub ekonomiczne (modelowanie zmian cen akcji i opcji w obrocie giełdowym). Na tym ostatnim przykładzie objaśnimy, jakie są naturalne pytania dotyczące procesów stochastycznych i co konkretnie zamierzamy badać.

W roku 1900 L. Bachelier zaproponował modelowanie zmian cen na giełdzie za pomocą pewnego procesu losowego, dziś znanego jako ruch Browna B_t . Ponieważ jednak wielkość zmiany ruchu Browna nie zależy od wartości procesu w danej chwili, lepszym modelem jest ten, w którym przyrost jest proporcjonalny do wartości procesu w danej chwili, gdy jasne jest, że o bardziej prawdopodobny jest wzrost ceny o 10 zł dla akcji, kosztującej 100 zł, niż dla akcji w cenie 5 zł. Taki poprawiony model zaproponował P. Samuelson w 1963 roku: niech B_t będzie ruchem Browna, a S_t ceną akcji w chwili t . Modelujemy cenę akcji za pomocą procesu $S_t = se^{Bt + \mu t}$, gdzie $s > 0$, μ i σ pewnymi stałymi. Korzystając z tego modelu, Black, Scholes i Merton podali w roku 1973 wzór, zwany wzorem Blacka-Scholesa, opisujący wycenę opcji, za co w roku 1997 Merton i Scholes otrzymali nagrodę Nobla z ekonomii. Jednak wzór ten nie zawsze działa dobrze, gdy według niego ceny muszą się zmieniać w sposób ciągły, a w chwilach niepewności na rynku ceny zmieniają się skokowo. Zaczyna więc być ciekawiejsze modelowanie postaci $X_t = se^{X_t}$, gdzie X_t jest procesem Lévy'ego, to znaczy procesem o niezależnych i stacjonarnych przyrostach. Wiele procesów z tej klasy zmienia swoje wartości skokowo. Naturalnymi pytaniami stawianymi przez ekonomistów i inwestorów są następujące: jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w najbliższym miesiącu cena danej akcji wzrośnie i jak wielki będzie to wzrost, czy ta cena osiągnie kiedyś założony przez inwestora poziom (przy którym akcje sprzeda), a jeśli tak, to z jakim prawdopodobieństwem trzeba będzie czekać na to dłuższy czas t . W momencie osiągnięcia założonego poziomu i sprzedaży akcji proces się kończy, modelujemy to za pomocą zabijania procesu po osiągnięciu lub przekroczeniu ustalonego poziomu.

A teraz opiszmy to samo zagadnienie w języku matematyki. Rozważmy proces Lévy'ego X_t o wartościach w przestrzeni wielowymiarowej \mathbb{R}^d i zabijamy go przy wyjściu z pewnego zbioru D . Interesują nas dokładne wzory opisujące pewne wielkości związane z tym procesem, albo przynajmniej ich dokładne oszacowania. Takimi wielkościami dla procesu zabijanego przy wyjściu ze zbioru D są: $p_D(t, x, y)$, czyli prawdopodobieństwo przejścia procesu ze stanu x do y w czasie t , rozkład $D(x)$ czyli momentu pierwszego wyjścia procesu ze zbioru D startującego z x (rozkład czasu życia procesu), funkcja Greena $G_D(x, y)$ czyli gęstość rozkładu czasu przebywania w punkcie y procesu startującego z x i zabitego przy wyjściu z D , średni czas życia procesu oraz jędro Poissona, czyli gęstość rozkładu procesu po opuszczeniu zbioru D .

Dla klasy wszystkich procesów Lévy'ego i dowolnych zbiorów otwartych D powyższe pytania są bardzo trudne. Dlatego zamierzamy na razie badać te procesy Lévy'ego, których wykładniki charakterystyczne mają dobre własności skalowania. Postaramy się podać konkretne wzory (tam, gdzie okaże się to możliwe) lub dokładne oszacowania prawdopodobieństw przejścia, funkcji Greena i jędra Poissona takich procesów, zabijanych przy wyjściu z ustalonego zbioru.

Okazało się, że opisany powyżej proces Samuelsona S_t , zwany geometrycznym ruchem Browna, jest jednym ze współrzędnych ruchu Browna w przestrzeni hiperbolicznej. Ponieważ procesy α -stabilne, $0 < \alpha < 2$ okazały się w wielu przypadkach lepsze do modelowania niż ruch Browna, spróbujemy zbadać hiperboliczny proces α -stabilny.

Inną klasę procesów, które chcemy zbadać, są d -wymiarowe procesy samopodobne. Proces X_t jest samopodobny w skali $c > 0$, jeśli dla pewnego $c > 0$ procesy $c^{-1} X_{ct}$ oraz X_t mają takie same rozkłady. Procesy takie służą do modelowania tych zjawisk fizycznych i kosmologicznych, w których odpowiednie zmiany skali czasu i skali przestrzeni nie zmieniają procesu. Trajektorie takich procesów są fraktalami. Dla takich procesów chcemy uzyskać opis, analogiczny do już istniejącego opisu w przypadku jednowymiarowym. Opis taki pozwoliłby lepiej zrozumieć budowę i zachowanie się takich procesów.