Niniejszy projekt leży w głównym nurcie badań na pograniczu geometrii algebraicznej i arytmetyki. Geometria algebraiczna zajmuje się zbiorami rozwiązań układów równań wielomianowych. Ma bliskie związki z jednej strony z teorią liczb (np. dowód Wielkiego Twierdzenia Fermata), a z drugiej strony z fizyką matematyczną (m.in. z teorią strun, kwantową teorią pola i symetrią lustrzaną). Fakt, że współczesna geometria algebraiczna dostarcza jednorodnego języka w którym można mówić o tak różnorodnych problemach spowodował (stosunkowo niedawno) dość zaskakujący przepływ idei pomiędzy tymi pozornie niezwiązanymi dziedzinami. W prezentowanym projekcie proponowane są badania zarówno geometrii rozmaitości nad ciałami o dodatniej charakterystyce, jak i nad ciałem liczb zespolonych, mieszając punkty widzenia fizyki matematycznej i teorii liczb. Jedną z głównych motywacji badania tej tematyki jest jej zastosowanie w teorii liczb, topologii, równaniach różniczkowych i w fizyce matematycznej.

Przykładowo jednym z rozważanych problemów jest badanie ogólnych równań różniczkowych na rozmaitościach zespolonych i próba ich klasyfikacji. Same holomorficzne równania różniczkowe na rozmaitościach mogą być w prostych przypadkach (gdy pojawiają się tylko tzw. regularne osobliwości) klasyfikowane topologicznie przez stowarzyszoną reprezentację grupy podstawowej, tak zwaną monodromię. Przestrzeń klasyfikująca reprezentacje grupy podstawowej rozmaitości ma naturalną strukturę algebraiczną otrzymaną przez zapisanie grupy przy pomocy jej generatorów i relacji między nimi. Jednak opis holomorficznych zmian równań różniczkowych prowadzi do badania innych struktur algebraicznych niż ta najbardziej naiwna i do tej pory został on dobrze zrozumiany jedynie w przypadku krzywych. Problem który rozważamy dotyczy istnienia takiej struktury algebraicznej w ogólnym przypadku, gdzie nie tylko opis rozwiązań równań różniczkowych przy pomocy monodromii jest niewystarczający, ale wymiar rozmaitości może być dowolny. Jednak sama motywacja dla tego typu rozważań pochodzi z arytmetyki, a konkretnie z twierdzenia Deligne'a o skończoności snopów l-adycznych z ograniczonymi rozgałęzieniami na rozmaitościach nad ciałami skończonymi. Dowód tego twierdzenia używał głębokich rezultatów Lafforgue'a dotyczących odpowiedniości Langlandsa na krzywych. W przypadku gdy analogiczny problem zaczniemy rozważać na rozmaitościach określonych nad ciałami o dodatniej charakterystyce, zaczyna on mieć głębokie związki z pewnymi hipotezami dotyczącymi struktury D-modułów na rozmaitościach algebraicznych. Przykładowo, rozwiązanie analogicznego problemu jak powyżej opisany w dodatniej charakterystyce prowadzi natychmiast do dowodu hipotezy, że ze znikania grupy podstawowej otwartej rozmaitości wynika trywialność wszystkich D-modułów skończonej rangi na tej rozmaitości.

Pozostałe problemy są trudniejsze do opisania w prostym języku, ale wszystkie są związane z badaniem reprezentacji grupy podstawowej rozmaitości algebraicznej i geometrii rozmaitości algebraicznych określonych w różnych charakterystykach i również są one głęboko związane z arytmetyką. Dotyczą one badania uogólnienia nieabelowej teorii Hodge'a z przypadku zespolonego do przypadku dodatniej charakterystyki i przypadku p-adycznego, badania teorii homotopii rozmaitości w dodatniej charakterystyce, badania grupy monodromii przy pomocy powstałej w końcu lat 80-tych XX wieku log geometrii i badania p-adycznego programu Langlandsa przy pomocy niedawno odkrytych przestrzeni perfektoidalnych.

Techniki używane w rozwiązywaniu tych problemów mają już wiele różnych zastosowań. Nieabelowa teoria Hodge'a jest bardzo istotna między innymi w geometrycznym programie Langlandsa i pojawiła się w tym kontekście w kwantowej teorii pola w pracach Wittena i jego współpracowników: Kapustina, Gukova i Frenkela. Teoria homotopii w dodatniej charakterystyce odgrywa ważną rolę w p-adycznej teorii Hodge'a i rozwiązanie badanych problemów pozwoliłoby na zrozumienie podstawowych cegiełek opisujących grupę podstawową rozmaitości algebraicznych. Badanie grupy monodromii przy pomocy log geometrii już ma ważne zastosowania w programie Grossa-Sieberta dotyczącym pochodzącej z fizyki symetrii lustrzanej a rozwiązanie postawionych problemów pozwoliłoby na systematyczne badanie pochodzących z geometrii równań różniczkowych przy pomocy log geometrii. Z kolei przestrzenie perfektoidalne służą bezpośredniemu przenoszeniu problemów między charakterystyką zero i charakterystyką dodatnią, ale są jeszcze zbyt mało zrozumiane by mieć dużo zastosowań, co daje duże pole do dalszych ich badań.

Rozwiązanie nawet części z problemów opisanych w projekcie dałoby między innymi głębokie rezultaty w pewnych częściach programu Langlandsa i ma potencjalne zastosowania do badania różnych geometrycznych i arytmetycznych problemów, nawet tak elementarnych jak badanie osobliwości krzywych na płaszczyźnie.