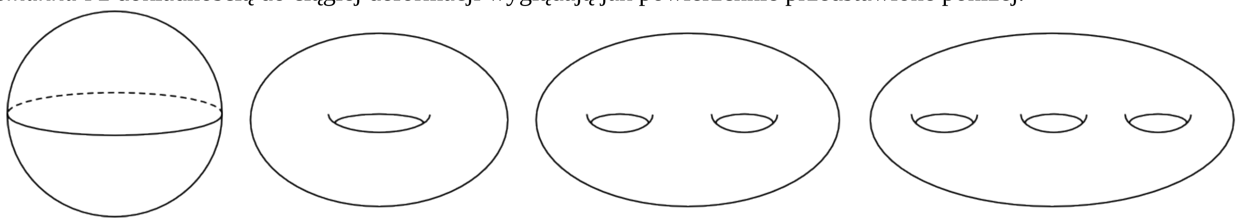
Jedną z najważniejszych cech wspólnych większości zastosowań matematyki w innych dziedzinach nauki jest potrzeba rozwiązywania równań. Na ogół jednak, jeżeli dopuścimy bardzo ogólną postać równań, to problem ten jest bardzo trudny, ponadto sama struktura zbioru rozwiązań interesującego nas równania może być bardzo skomplikowana. Z tego powodu matematycy na ogół koncentrują swoje wysiłki na bardzo specjalnych klasach równań oraz problem znalezienia ich rozwiązań (co na ogół po prostu nie jest możliwe) zastępują pytaniami typu: *jakie własności ma zbiór rozwiązań?, kiedy dwa równania mają taki sam zbiór rozwiązań?* itp.

Klasa równań leżąca u podstaw przygotowanego przez nas projektu to równania wielomianowe dwóch zmiennych zespolonych, np. równania typu:

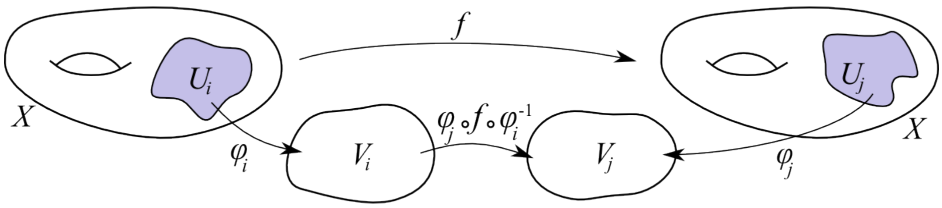
$$x^2+y^2+i=0, \quad y^2=x^2+x+1.$$

Cechą wspólną wszystkich takich równań jest to, że ich rozwiązania w pobliżu punktów nieosobliwych lokalnie wyglądają jak płaszczyzna zespolona. Jeżeli więc ograniczymy się do równań nieosobliwych oraz dokonamy naturalnego uzwarcenia (poprzez tzw. projektywizację, zwaną też urzutowieniem) zbiorów rozwiązań, to otrzymane rozwiązania będą powierzchniami, które posiadają lokalnie tę samą strukturę analityczną, co płaszczyzna zespolona. Powierzchnie takie noszą nazwę *powierzchni Riemanna* i z dokładnością do ciągłej deformacji wyglądają jak powierzchnie przedstawione poniżej.



(Od lewej mamy kolejno sferę, torus, powierzchnię rodzaju 2, powierzchnie rodzaju 3 itd.). Powyższy rysunek jest jednak mylący, bo przedstawianie powierzchni z dokładnością do ciągłej deformacji wymazuje informację o strukturze zespolonej, która jest integralną częścią powierzchni Riemanna. To co widzimy na powyższym obrazku to tylko nośnik tej struktury (tzw. *typ topologiczny*) - na każdej powierzchni rodzaju $g>0$ istnieje nieskończenie wiele różnych struktur zespolonych i właśnie badaniu tych struktur w dużej mierze jest poświęcony nasz projekt.

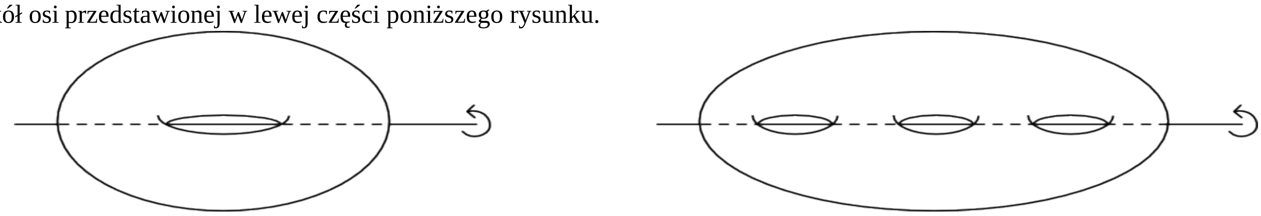
Bardzo ważnym pojęciem wyróżniającym niektóre powierzchnie Riemanna X jest pojęcie *automorfizmu* $f\colon X\to X$, czyli wzajemnie jednoznacznego przekształcenia X, które zachowuje strukturę zespoloną (tzn. po lokalnym utożsamieniu dziedziny i obrazu odwzorowania z podzbiorem płaszczyzny zespolonej, f jest odwzorowaniem holomorficznym).



Większość powierzchni Riemanna nie posiada żadnego nietrywialnego automorfizmu, więc bardzo ciekawy jest problem opisu, czy też klasyfikacji powierzchni Riemanna, które posiadają automorfizmy. W języku równań, powierzchnie Riemanna z nietrywialnymi automorfizmami odpowiadają równaniom, które posiadają automorfizm algebraiczny, tzn. można w tym równaniu dokonać nietrywialnej algebricznej zmiany zmiennych tak, aby równanie nie uległo zmianie (w zastosowaniach zwykle oznacza to, że zjawisko opisane równaniem posiada pewnego rodzaju symetrię lub prawo zachowania). Taka sytuacja ma miejsce np. w przypadku równania:

$$y^2=x^2+x+1.$$

Możemy w tym równaniu zmienić zmienne podstawiając $(x',y')=(x,-y)$ i wyniku tej zmiany równanie nie ulegnie zmianie. To oznacza, że istnieje nietrywialny automorfizm powierzchni Riemanna, która odpowiada rozwiązaniom tego równania. W tym konkretnym przypadku powierzchnia ta jest torusem i opisany wyżej automorfizm możemy reprezentować jako obrót o 180 ^{o} wokół osi przedstawionej w lewej części poniższego rysunku.



Pojęciem, które uogólnia powyższy przykład są tzw. *hipereliptyczne* powierzchnie Riemanna - są to powierzchnie, których rodzaj może być większy niż 1, ale które posiadają automorfizm, którego geometria działania jest taka sama jak na powyższym rysunku (tzn. przestrzeń orbit tego działania jest sferą). Nasz projekt będzie w dużej części poświęcony badaniu własności automorfizmów powierzchni Riemanna, np. będziemy zajmować się problemem topologicznej klasyfikacji możliwych działań na takich powierzchniach.

Innym ciekawym zjawiskiem jest fakt, że w niektórych równaniach o współczynnikach zespolonych można dokonać algebraicznej zmiany zmiennych w ten sposób, że otrzymane równanie ma już współczynniki rzeczywiste (jest to tzw. forma rzeczywista wyjściowego równania). Tak jest np. w przypadku równania: $x^2+y^2=i$, gdzie dokonując zamiany zmiennych:

$$(x',y')=(i\sqrt{i}x, i\sqrt{i}y) \text{ lub } (x',y')=(\sqrt{i}x, \sqrt{i}y)$$

otrzymamy odpowiednio równania:

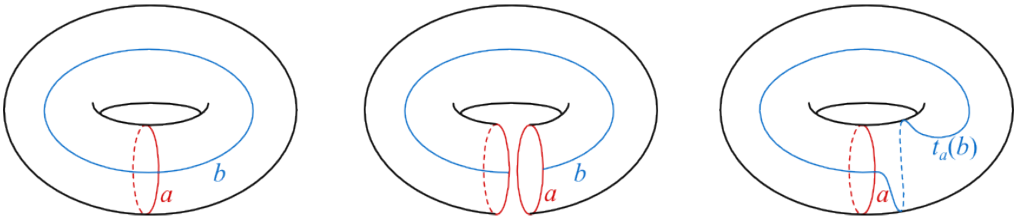
$$x^2+y^2=1 \text{ i } x^2+y^2=-1.$$

Istnienie tego typu zmiany zmiennych oznacza, że powierzchnia odpowiadająca zbiorowi rozwiązań tego równania ma symetrię (rozumianą jako antyholomorficzny automorfizm). W ten sposób badanie form rzeczywistych równań sprowadza się do badania symetrii odpowiadających im powierzchni Riemanna. W powyższym przykładzie zbiór rozwiązań równania jest sferą, a opisane podstawiania (a więc też otrzymane równania o współczynnikach rzeczywistych), odpowiadają jej dwóm symetriom: jednej która jest odbiciem lustrzanym względem płaszczyzny zawierającej równik, a druga jest odwzorowaniem antypodycznym. Zauważmy jeszcze, że punkty stałe tych symetrii (czyli równik w pierwszym i zbiór pusty w drugim przypadku) odpowiadają rzeczywistym rozwiązaniom otrzymanych form rzeczywistych.

Innym ważnym problemem, którym będziemy się zajmować się w ramach naszego projektu jest problem klasyfikacji powierzchni Riemanna ustalonego rodzaju g. Okazuje się, że wszystkie takie powierzchnie można sparametryzować przy pomocy punktów bardzo porządnej przestrzeni M_g zwanej *przestrzenią moduli*. W ramach projektu będziemy zajmować się badaniami naturalnych podzbiorów S_g, R_g, H_g tej przestrzeni zwanych miejscami osobliwymi, rzeczywistymi i hipereliptycznymi (z ang. singular, real and hyperelliptic loci), a parametryzującymi powierzchnie Riemanna, które odpowiednio: posiadają nietrywialny automorfizm, posiadają symetrię, bądź są hipereliptyczne.

Ważnym elementem w konstrukcji przestrzeni moduli M_g jest *grupa klas odwzorowań* (w skrócie MCG - od ang. *mapping class group*). Grupa ta składa się z przekształceń ustalonej powierzchni topologicznej, przy czym utożsamiamy ze sobą przekształcenia, jeżeli różnią się ciągłą deformacją. Znanych jest wiele przykładów, gdy algebraiczne własności grupy MCG pozwalają otrzymać ciekawe własności przestrzeni moduli M_g. Np. fakt, że każde przekształcenie w MCG może być otrzymane przy pomocy składania ze sobą (wykonywania po kolei) przekształceń skończonego rzędu oznacza, że w przestrzeni moduli M_g nie ma dziur jednowymiarowych (jest jednospójna). Z tego powodu badania algebraicznych własności MCG są bardzo ważne i duża część naszego projektu będzie poświęcona temu zagadnieniu.

Przykładem nietrywialnego element MCG (czyli przekształcenia powierzchni) jest tzw. *skręcenie Dehna*, tzn. przekształcenie t_a przedstawione na poniższym rysunku - rozcinamy powierzchnię wzdłuż narysowanej krzywej a, obracamy jeden z otrzymanych końców o 360°, a następnie ponownie sklejamy miejsce rozcięcia.



Algebraiczne własności skręceń Dehna są ważne, gdyż elementy te generują grupę MCG, tzn. każde przekształcenie f w MCG można otrzymać wykonując po sobie skończoną liczbę skręceń. Takie przedstawienie f jako produktu skręceń nie jest jednak jednoznaczne i powstaje ważne pytanie o możliwe relacje między skręceniami Dehna (bo właśnie te relacje są źródłem niejednoznaczności rozkładów). Przykładem takiej nietrywialnej relacji jest *relacja warkocza*: $t_at_bt_a=t_bt_at_b$, gdzie t_a i t_b są skręceniami Dehna względem krzywych przedstawionych na powyższym rysunku. Znanych jest wiele różnych relacji między skręceniami Dehna, niemniej jest też wciąż wiele otwartych problemów, które ich dotyczą i tym również będziemy się zajmować w ramach realizowanego projektu.

Kolejnym wątkiem tematycznym, który będzie przedmiotem naszych badań są własności rozmaitości wymiarów 3 i 4, czyli przestrzenie, które lokalnie (w małym otoczeniu każdego punktu) wyglądają jak standardowa przestrzeń trójwymiarowa $\mathbf{R}^3$ lub $\mathbf{R}^4$ zamiast $\mathbf{R}^2$ jak w przypadku powierzchni. Tematyka ta, między innymi poprzez swoje związki z fizyką teoretyczną, od wielu lat jest przedmiotem intensywnych badań matematyków na całym świecie. Nasze badania takich rozmaitości koncentrują się wokół wykorzystania własności powierzchni (a więc rozmaitości wymiaru 2) do konstrukcji wyżej wymiarowych rozmaitości. Jest wiele przykładów takich konstrukcji, np. rozkłady Heegaarda, produkty izogeniczne, rozwłóknienia Lefschetza, rozkłady książkowe. Nie wchodząc w szczegóły techniczne, niektóre klasy rozmaitości wymiarów 3 i 4 mogą być badane przy użyciu metod 2-wymiarowych. W ten sposób nasza wiedza i doświadczenie zdobyte przy badaniu grup klas odwzorowań oraz powierzchni Reimanna pozwolą badać obiekty potencjalnie o wiele bardziej skomplikowane.