Ważnymi obiektami w matematyce są pierścienie. Są to zbiory, w których można wykonywać dwa działania: dodawanie i mnożenie, które mają mają takie same własności jak zwykłe działania dodawania i mnożenia, za wyjątkiem możliwości dzielenia przez elementy niezerowe. Gdy dzielenia jest wykonalne, to mówimy o ciele. Podstawowym przekładem pierścienia jest zbiór liczb całkowitych **Z**. Jeśli dodatkowo pierścień zawiera w sobie podzbiór będący ciałem *K* (z tymi samymi działaniami), to nazywamy go algebrą nad ciałem *K*. Przykładem algebry jest algebra *K[X]* wielomianów o współczynnikach w ciele *K* (np. o współczynnikach rzeczywistych).

Pierścienie często są badane za pomocą swoich kategorii modułów. Moduł nad pierścieniem *R* to zbiór, w którym elementy można do siebie dodawać oraz mnożyć przez elementy pierścienia *R*. Przykładem modułu nad pierścieniem liczb całkowitych jest zbiór reszt z dzielenia przez ustaloną liczbę całkowitą *n* z dodawaniem modulo *n* oraz mnożeniem przez liczby całkowite też modulo *n*. Jeśli pierścień *R* jest algebrą nad ciałem *K*, to moduł *M* nazywamy skończenie wymiarowym, jeśli istnieje skończenie wiele elementów m_1, ..., m_d modułu *M* takich, że każdy inny element modułu *M* można uzyskać z wybranych elementów przez wykonywanie dodawania oraz mnożenia przez elementy ciała *K*. Najmniejszą liczbę *d* o tej własności nazywamy wymiarem modułu *M*. Ciągi m_1, ..., m_d, dla których osiągana jest ta minimalna wartość, nazywamy bazami modułu *M*. Zauważmy, że algebra *R* jest również modułem nad *R*, więc możemy używać tych pojęć również w stosunku do algebry.

Jeśli ustalimy algebrę *R* wymiaru *e* nad ciałem *K* oraz liczbę *d*, to możemy przypisać każdemu *d*-wymiarowemu modułowi nad algebrą *R* ciąg ed^2 elementów ciała *K*, który opisuje mnożenie elementów modułu przez elementy algebry. Zbiór wszystkich ciągów, które można otrzymać w ten sposób, jest opisany wewnątrz przestrzeni wszystkich ciągów długości ed^2przez równania wielomianowe, a więc jest rozmaitością afiniczną w rozumieniu geometrii algebraicznej. Zbiór ten nosi nazwę rozmaitości *d*-wymiarowych *R*-modułów i jest oznaczany $\mathrm{mod}_R(d)$. Ciąg przypisywany modułowi *M* nie jest wyznaczony jednoznacznie - zależy od wyboru bazy modułu *M* (dla odmiany, baza algebry *R* jest ustalona). Zbiór ciągów, które można otrzymać dla modułu *M* oznaczamy przez O_M. Przez $\mathrm{cl}(O_M)$ oznaczamy domknięcie zbioru O_M, które, obrazowo rzecz ujmując, jest zbiorem punktów, które leżą blisko zbioru O_M. Zbiór $\mathrm{cl}(O_M)$ jest ponownie rozmaitością afiniczną.

Głównym celem naszego projektu jest badanie geometrycznych własności rozmaitości $\mathrm{mod}_R(d)$ oraz $\mathrm{cl}(O_M)$. Dla przykładu, dla każdej rozmaitości afinicznej *X* oraz jej punktu *x* definiuje się obiekt T_xX nazywany przestrzenią styczną do rozmaitości *X* w punkcie *x*. Konstrukcja ta uogólnia konstrukcje prostej i płaszczyzny stycznej znane z klasycznej geometrii. Punkt *x* rozmaitości *X* nazywamy nieosobliwym, jeśli, mówiąc intuicyjnie, przestrzeń styczna w punkcie *x* jest tak duża jak rozmaitość *X* w otoczeniu punktu *x* (formalnie, wymiar przestrzeni T_xX musi być równy wymiarowi rozmaitości *X* w punkcie *x*). Ważnym problemem jest badanie czy dany punkt jest nieosobliwy oraz z jakimi rodzajami (typami) osobliwości możemy mieć do czynienia.

Powyższe problemy, które mają charakter geometryczny, zamierzamy badać, wykorzystując interpretację punktów rozmaitości jako modułów nad algebrą. W tym drugim przypadku mamy cały wachlarz metod, głównie o charakterze homologicznym. Własności (homologiczne) modułów często rzutują na własności (geometryczne) odpowiadających im punktów. Obserwacja ta była już wykorzystywana w przeszłości przez wielu autorów (w tym przez nas) w badaniach geometrycznych. Zamierzamy kontynuować ten kierunek badań oraz rozwijać nowe metody, które pozwolą uzyskać głębsze wyniki.

Część naszych badań poświęcona będzie studiowaniu problemów o charakterze czysto homologicznym. Ważnym bowiem niezmiennikiem homologicznym związywanym z algebrą jest jej kategoria pochodna. Będziemy badać kategorie pochodne algebr pochodnie dyskretnych (tzn. algebr, dla których w kategorii pochodnej nie ma ,,ciągłych rodzin" obiektów), dążąc do wykazania, że w tej sytuacji istnieją tak zwane pochodne wielomiany Ringela-Halla.